This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

HARVARD COLLEGE

SCIENCE CENTER
LIBRARY

BOUGHT WITH INCOME

FROM THE BEQUEST OF

HENRY LILLIE PIERCE,

OF BOSTON.

Under a vote of the President and Fellows,
October 24, 1898.

DIE

INGENIEUR-MATHEMATIK

IN ELEMENTARER BEHANDLUNG.

VON

PROF. DR. GUSTAV HOLZMÜLLER,

DIREKTOR DER KGL. MASCHINENBAUSCHULE ZU HAGEN I.W., MITGLIED DER LEOPOLDINISCH-KAROLINISCHEN AKADEMIE.

ERSTER TEIL,

ENTHALTEND DIE STATISCHEN MOMENTE UND SCHWERPUNKTSLAGEN, DIE TRÄGHEITS- UND CENTRIFUGALMOMENTE FÜR DIE WICHTIGSTEN QUERSCHNITTSFORMEN UND KÖRPER DER TECHNISCHEN MECHANIK IN RECHNENDER UND GRAPHISCHER BEHANDLUNG UNTER BERÜCKSICHTIGUNG DER METHODEN VON NEHLS, MOHR, CULMANN, LAND UND REYE.

MIT 287 FIGUREN UND ZAHLREICHEN ÜBUNGSAUFGABEN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1897.

Math 358.97

Pierce fund

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

Den ersten Band einer Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung, deren Absichten in den Vorbemerkungen eingehender besprochen werden, übergebe ich hiermit den Fachmännern der Technik und der Mathematik als ein rein elementares Hülfsmittel für Berechnungen, wie sie die Theorie und die Praxis des Ingenieurfachs mit sich bringen. Es handelt sich darum, zu zeigen, dafs ein grofser Teil der Resultate, die im allgemeinen mit Hülfe höherer Rechnungsarten abgeleitet werden, der elementaren Behandlung zugänglich ist, da es zahlreiche Methoden giebt, die Differentiationen und Integrationen zu umgehen. Ist dies in hinreichendem Mafse möglich, so kann der Studierende der technischen Hochschule schon im ersten Semester sich in die wichtigsten Begriffe der technischen Mechanik hineinarbeiten und mit ihnen rechnen, ehe er die Integralrechnung absolviert hat. Der Lehrer der mittleren und höheren Fachschule aber hat nicht nötig, den Schülern unbewiesene Formeln zu übergeben und ihnen zu versichern, dafs man diese mit Hülfe der höheren Analysis beweisen könne. Er ist in der Lage, die Resultate verhältnismäfsig einfach abzuleiten oder, wenn die Zeit der Schule nicht ausreicht, den fähigeren Schüler darauf hinzuweisen, wie er sich durch häusliches Studium zum Herren des Gegenstandes machen kann.

Aber nicht nur für die Schule, sondern auch für die zahlreichen praktischen Ingenieure, die sich der höheren Analysis nicht mehr bedienen wollen oder können, ist eine handliche Zusammenstellung der Methoden, die zum Ziele führen, ein wirkliches Bedürfnis. Gerade aus ihren Kreisen traten im Laufe der Jahre zahlreiche Anfragen an mich heran, die ich im Interesse der Schule mit besonderer Vorliebe bearbeitete. Fragte ich dabei an, ob man eine analytische oder eine elementare Lösung wünschte, so wurde ausnahmslos die letztere erbeten.

Diesen Anregungen aus den Kreisen der Praktiker verdanke ich es in erster Linie, auf diejenigen Punkte aufmerksam geworden zu

sein, wo die gebräuchlichen Elementarmethoden nicht ausreichten und neue Wege und Gedankenverbindungen wünschenswert erschienen. Bisweilen liefsen sich gewissermafsen Brücken schlagen, die scheinbar verbindungslose Gebiete einander näher brachten.

So sammelte sich allmählich reiches Material an, welches mir aus einem besonderen Grunde der Zusammenstellung wert erschien. Die technischen Lehrbücher nämlich schleppen zum Teil eine grofse Menge mathematischen Ballastes mit sich, der in ziemlich oberflächlicher Weise behandelt werden mufs, wenn das eigentlich Technische nicht allzustark in den Hintergrund gedrängt werden soll. Vielleicht ist manchem Verfasser damit gedient, wenn er sich um die mathematischen Herleitungen nicht zu bekümmern braucht, sondern auf ein Elementarwerk verweisen kann, welches solche enthält.

Die betreffenden Methoden werden auch für die Lehrer der Mathematik von Interesse sein, da die hier durchgerechneten Beispiele eine reiche Fülle von Übungsstoff für gewisse Schulgebiete enthalten. Mancher dürfte überrascht darüber sein, wie weit man ohne höhere Hülfsmittel vorzudringen imstande ist.

Meines Wissens handelt es sich bei dem Buche um einen ersten Versuch dieser Art. Ob er geglückt ist oder nicht, darüber mögen andere urteilen. Nur verlange man keine lückenlose Systematik. Es handelt sich darum, möglichst schnell in medias res zu führen und praktisch Verwertbares zu bringen. Um aber die Verwertbarkeit nachzuweisen, wurden aus allen möglichen Gebieten der technischen Mechanik Übungsbeispiele eingeflochten. Anhangsweise gebe ich auch ein ausführlicheres Beispiel praktischer Verwendung in der graphisch und rechnerisch behandelten Schwungradtheorie, die schon verhältnismäfsig früh durchgenommen werden kann und sehr instruktive Aufgaben darbietet. Diese zeigen dem Anfänger, was man schon mit den wenigen Grundbegriffen leisten kann.

Einige andere von mir in der Zeitschrift deutscher Ingenieure veröffentlichte Aufgaben habe ich gleichfalls eingeschaltet, weil die Jahrbücher über die Fortschritte der Mathematik und über die der Physik auf die eigenartigen Lösungen besonders hingewiesen haben. Es handelt sich dabei um gewisse Probleme des Rollens und Gleitens auf schiefer Ebene, bei denen Betrachtungen über die Fadenspannung zum Ziele führten. Auf diesem Gebiete sind noch in letzter Zeit irrtümliche Resultate veröffentlicht worden, die dem Gesetze der Erhaltung der Arbeit nicht entsprachen und so ohne weiteres als falsch erkannt werden konnten. Die Anwendbarkeit einiger Gegenstände dieses Bandes wird sich erst im zweiten ergeben. Dieser wird unter anderem eine elementare Potentialtheorie enthalten und sogar in die stationären Elektricitäts- und Wärmeströmungen

in einfachster Weise einführen, denn der Übergang zum logarithmischen Potential läfst sich elementar bewerkstelligen.

Eine Zusammenstellung gewisser Methoden, die von Nehls, Mohr, Land, Reye und Culmann herrühren, dürfte manchem Techniker auch willkommen sein. Diese Dinge sind zum Teil nur in verschiedenen Zeitschriften zerstreut aufzufinden, was ihre allgemeinere Verbreitung gehemmt hat.

Hinsichtlich der Figuren bin ich wiederum meinem Kollegen Herrn Oberlehrer und Ingenieur Kurt Zimmermann zu Dank verpflichtet. Fast sämtliche hat er auf Grund meiner flüchtigen Skizzen exakt ausgeführt und so die Fertigstellung des Werkes binnen Jahresfrist ermöglicht. Aber auch der Verlagsbuchhandlung mufs ich für die Liberalität, mit der sie auf die reiche Ausstattung des Buches mit Figuren eingegangen ist, den verbindlichsten Dank aussprechen.

Möge denn dieser erste Band der Ingenieur-Mathematik seinem Zwecke dienen und besonders mit dazu beitragen, der deutschen Industrie leistungsfähige Techniker heranzuziehen, die unser Vaterland in dem Kampfe ums Dasein nicht mehr entbehren kann.

Hagen i/W., im Dezember 1896.

Prof. Dr. **Holzmüller.**

Inhalts-Verzeichnis.

Seite

Vorbemerkungen 1

Abschnitt I.

Schwerpunktsbestimmungen für ebene Flächen.

Allgemeine Formel 9
Verschiedene Profile. 10
Guldinsche Regel für Drehungskörper 12
Halbkreisfläche, halber Kreisring, Kreisabschnitt 13
Guldinsche Regel für Drehungsflächen 15
Kreisbogen, Kreissektor, Ringsektor 16
Ellipsensegmente 18
Flächen mit Ausschnitten 18
Anwendungen auf abgeschrägte Körper, Diagrammkörper des seitlichen Wasserdrucks, Centrifugalkraft u. s. w. 19
Graphische Schwerpunktsbestimmungen 21

Abschnitt II.

Die einfachsten Trägheitsmomente ebener Flächen.

Begriff des axialen Trägheitsmoments 25
Veranschaulichung durch das statische Moment abgeschrägter Körper . . . 25
Veranschaulichung durch parabolisch begrenzte Körper. 27
Satz über die Parallelverschiebung 28
Einfache Beispiele. Dreieck, Rechteck, Parallelogramm 29
Begriff des polaren Trägheitsmoments 31
Einfache Beispiele, Rechteck, Dreieck, regelmäfsiges Vieleck, Ellipse . . . 32
Veranschaulichung des polaren Trägheitsmoments 34
Dynamisches Trägheitsmoment 35
Anwendungen auf Energie drehender Massen, physisches Pendel, excentrischen Stofs, Hydrostatik, Festigkeitslehre 36
Schwerpunkt abgeschrägter Prismen und Cylinder 38
Schwerpunkt halber Drehungskörper und Centrifugalkraft für solche . . . 39
Schwerpunkt des Meridianskeils der Kugel 40

Abschnitt III.

Trägheitsmomente für die wichtigeren Querschnittsformeln des Bau- und Maschinenwesens.

Seite

A. Die Momente 42
Rechteck, Quadrat, Gurtungen, I-Eisen 43
╋-Eisen, [-Eisen, T-Träger, Γ-Eisen 44
Dreieck und Trapez 47
Regelmäfsiges n-Eck 48
Kreisfläche und Kreisring 49
Halbkreisfläche und Halbkreisring 50
Flügelachse, Viertelkreis, Kreis-Ausschnitt und -Abschnitt 50
Ellipse, Halbellipse, elliptischer Ring 52
B. Bemerkungen und numerische Beispiele 55
Vernietete Träger 55
Trägheits- und Widerstandsmomente für Träger und Säulen 56
Schleifstein und Schwungring 58
Beschleunigung drehender Massen 59
Schwingungen physischer Pendel 60
Cylindrische Triebwellen 61

Abschnitt IV.

Centrifugal- und Trägheitsmomente für beliebige Achsen.

Der Drehungssatz 65
Begriff und Veranschaulichung des Centrifugalmoments 66
Centrifugalmoment für Rechteck und Kreis 67
Anwendung des Centrifugalmoments auf die Schwerpunktsbestimmung abgeschrägter Körper 68
Halbkreis, Halbellipse und symmetrische Fläche 69
Schwerpunkt Guldinscher Drehungskörper 70
Der Drehungskörper im Symmetriefalle 71
Andere Deutungen des Centrifugalmoments 72
Dreieck und Viertelkreis 73
Fälle, in denen das Centrifugalmoment verschwindet 75
Verschiebungssatz für das Centrifugalmoment 76
Trägheitsradius 77
Satz über ringförmige Körper 78
Radius des Centrifugalmoments 80
Satz von der Trägheitsellipse 82
Folgerungen dieses Satzes (Hauptachsen und Gleichheitsachsen) 83
Centralellipse 84
Hauptachsenlage beliebiger Trägheitsellipsen 85
Rechteck, Halbkreis, gleichschenkliges Winkeleisen 87
Centrifugalmoment für die Gleichheitsachsen 89
Drehungssatz für das Centrifugalmoment 89
Bestimmung der Hauptträgheitsachsen 90
Lemniskate des Centrifugalmoments 92
Die Fixpunkte oder Punkte konstanten Trägheitsmoments 96

Seite
Die Culmannsche Trägheitsellipse 98
Beispiel des ungleichschenkligen Winkeleisens 99
Centralellipse für einige Querschnitte 105
Grenzmomente für den Viertelkreis und Achtelkreis. 105
Eine Beziehung zwischen Trägheits- und Centrifugalmoment 107

Abschnitt V.

Einige Hülfsmittel der Elementarmathematik.

(Methode der unendlich dünnen Schichten.)

A. Newton-Simpsonsche Regel für Körper und Flächen und Schichtenformel für Querschnitte bis zur dritten Ordnung 109
Anwendungen auf Mechanik 115
Beispiel des Trapezes, der Parabeln zweiter und höherer Ordnung . . 115
B. Schichtenformel für ganze positive Exponenten von beliebiger Gröfse 119
Anwendung auf unendliche Reihen 121
Anwendungen auf die Mechanik der Halbkugel und Kugel 122
Stofs gegen die Erdkugel 125
Rollen auf schiefer Ebene, kosmisches Problem 128
Allgemeine Folgerungen 129
C. Die Parabeln gebrochener und negativer Ordnung und die Schichtenformel für gebrochene und negative Exponenten 131
Flächenberechnung mit Hülfe der Entwickelung in unendliche Reihen 131
Konstruktion der Parabeln höherer Ordnung 135
Mariottesches, adiabatisches und Potential-Diagramm 136
Parabolische Berechnungen. 137
Tabelle über die Parabeln höherer Ordnung 141
Beispiel der Neilschen Parabel 144
Restfläche der gewöhnlichen Parabel 145
Hakenquerschnitt 145
Die gleichseitige Hyperbel, ihre Fläche und ihre verschiedenen Momente 146
Die Gravitationscurve, Fläche und Momente. 149
Die logarithmische Linie, Fläche und Momente 150
D. Die Schichtenformel für concentrische Kreisbogen 157
Polarmomente 1. und 2. Ordnung. 157
Beispiel des Kreises, des Sektors und der Halbkreisfläche 158
Archimedische und andere Spiralen 160
Kreisbogen und Kreissektor 162
Kreisabschnitt, Ringsektor 164
E. Einige Aufgaben über Maxima und Minima. 167
Der Querschnitt gröfster Tragfähigkeit, aus verschiedenen Flächen ausgeschnitten 167
Berechnung der Hauptachsen der Trägheit auf andere Art 169
F. Verallgemeinerte Simpsonsche Regel. 171
Anwendung auf Flächen, Körper, statische Momente, Trägheitsmomente und dgl 172

Abschnitt VI.

Anwendungen der lemniskatischen Abbildung auf die Bestimmung polarer Trägheitsmomente und polarer Momente erster Ordnung.

Seite

Die lemniskatische Abbildung 174
Ihr isogonaler (konformer) Charakter 177
Anwendung auf die Berechnung von Trägheitsmomenten, Flächen, Potentialwerten, Kurvenlängen und Polarmomenten erster Ordnung 179
Die Doppelschar gleichseitiger Hyperbeln 182
Die konfokalen Lemniskaten und das Büschel gleichseitiger Hyperbeln . . 187
Die Doppelschaar konfokaler Parabeln 188
Anwendungen auf Dreieck, Rechteck, parabolische Sektoren, Hyperbelsegmente, Cardioiden, u. s. w. 189
Hyperbel und Lemniskate als reciproke Kurven 195
Cardioide und Parabel als reciproke Kurven 195
Das Gesamtresultat des Abschnittes 196
Physikalische Betrachtungen 196

Abschnitt VII.

Graphostatische Methoden zur Bestimmung von Trägheits- und Centrifugalmomenten.

A. Graphische Methode von Nehls zur Bestimmung des statischen Momentes und Trägheitsmomentes einer Fläche 200
B. Graphische Methode von Mohr mit Hülfe des Kräfteplans und des Kräftepolygons 203
C. Andere Methode von Mohr, auf Benutzung eines Hülfskreises gestützt 205
D. Modifikation der Mohrschen Methode durch Land 209
E. Einige Eigenschaften und Anwendungen der Culmannschen Trägheitsellipse 211
Geometrische Vorbemerkung 211
Antipol der Geraden und Antipolare des Punktes in Bezug auf eine Ellipse 212
Eigenschaften der Tangenten Culmannscher Trägheitsellipsen und entsprechender Konstruktionen 215
Auftreten konfokaler Kegelschnitte 218
Auftreten von Lemniskaten und Hyperbeln 220
F. Ersatz der homogenen ebenen Fläche durch drei Massenpunkte nach Reye 222
Der allgemeine Fall 222
Der Sonderfall gleicher Massenpunkte 227
Beispiele: Dreieck, Rechteck, Parallelogramm 229
Kreis, Ellipse 231
Schlufsbemerkungen zu den graphischen Methoden 232

Abschnitt VIII.

Schwerpunkte und statische Momente homogener Körper.

Seite
Polare, axiale und Planmomente erster Ordnung 233
Beispiel der Halbkugel 233
Schwerpunkt eines Systems homogener Massenpunkte 234
Allgemeine Sätze 237
Körper von der Ordnung Null. 238
Körper erster Ordnung und ihre Stumpfe 238
Körper zweiter Ordnung 239
Kugelsektor 240
Stumpfe der Körper zweiter Ordnung 241
Körper gemischter Ordnung bis zum zweiten Grade. 242
Querschnitte höheren Grades 251
Negative und gebrochene Exponenten 253
Schraubengewinde 254
Parabolisch abgeschnittene Körper. 256
Anwendungen der Schwerpunktslehre auf Stabilität, Auftrieb bei schwimmenden Körpern, Pendel, einfache Maschinen, kosmische Massen u. dgl. 257

Abschnitt IX.

Die Trägheits- und Centrifugalmomente der wichtigsten Körper.

A. Allgemeines über Planmomente, Axialmomente und Polarmomente zweiter Ordnung 262
B. Die einfachsten Formen, besonders von der Ordnung Null. . 265
Prisma, Cylinder, Anwendung auf Atwoods Fallmaschine. 265
Anwendung auf Fadenspannung bei von Fäden ablaufenden Cylindern. 268
Anwendung auf Körper, die zugleich rollen und gleiten 271
Korrektur des Reibungswinkels bei solchen Problemen 272
Rollen und Gleiten der Kugel auf schiefer Ebene 273
Rollen und Gleiten des Cylinders auf horizontaler Ebene 274
Rollen und Gleiten beliebig gestalteter Körper auf schiefer Ebene. . . 278
Ein dynamisches Übungsbeispiel 280
Senkrechte Prismen und Cylinder, Veranschaulichung ihrer Trägheitsmomente. 282
Konstruktion der Ausdrücke a^n 283
C. Körper von der Ordnung 1 283
Dreieckskörper 284
Drehungsparaboloid 285
D. Körper von der Ordnung 2 286
Senkrechte Kreiskegel 286
Parabolischer Cylinder 287
E. Körper gemischter Ordnung bis zur zweiten Potenz 288
Drehungsellipsoid 289
Dreiachsiges Ellipsoid 290
Segmente und Schichten der Kugel und des Ellipsoids 291
Hyperboloid 294

Seite
F. Einige Körper höherer Ordnung 295
Allgemeine Körper n^{ter} Ordnung 295
Drehungskörper höherer Ordnung 296
Der Drehungskörper mit symmetrischer Schnittfläche 297
G. Der Drehungssatz für die Trägheitsachsen 298
Hülfsaufgaben 298
Trägheitsmoment für beliebig gerichtete Achsen 300
Bedeutung des Centrifugalmoments 300
Das Trägheitsellipsoid 301
Bestimmung der Hauptachsen aus gegebenen Momenten 303
Dynamische Bedeutung der Hauptachsen 304
Symmetriefälle 304
Beziehungen zwischen Plan-, Axial- und Polarmomenten 306
Verschiebungssätze 307
Drehungssatz für Planmomente 308
Möglichkeit von Fixpunkten 309
Fixpunkte bei regelmäfsigen Prismen 310
Bemerkungen über Planmomente 311
Beispiele von Centrifugalmomenten 312
Das zweite Central-Ellipsoid 315
Anwendbarkeit der Lehre von den Trägheits- und Centrifugalmomenten 317

X. Anhang.

Die Schwungradtheorie als elementares Beispiel 319
A. Das Schwungrad als Ansammler der Energie 320
B. Schwungrad und Centrifugalkraft 325
C. Die ausgleichende Arbeit des Schwungrades bei der einfachen Kurbelbewegung 326

Vorbemerkungen.

Unter Ingenieur-Mathematik versteht man den Inbegriff derjenigen mathematischen Wahrheiten, Konstruktions- und Berechnungsmethoden, die der Techniker und Konstrukteur beherrschen muſs, wenn er in der Lage sein will, die ihm in der Praxis entgegentretenden Aufgaben zu lösen. Dazu gehört allerdings auch die Beherrschung der Elemente der Arithmetik, Planimetrie, Trigonometrie und Stereometrie, wie sie auf den höheren Schulen erreicht werden soll. Diese Elemente aber werden hier als bekannt vorausgesetzt und nicht der Behandlung unterworfen. Auch über die darstellende Geometrie soll hier nicht gesprochen werden, da für dieses Gebiet vortreffliche Lehrbücher vorhanden sind. Durch diese Bemerkungen wird gewissermaſsen die untere Grenze für das im vorliegenden Werke Beabsichtigte festgestellt.

Soll es sich nun um eine elementare Darstellung der Ingenieur-Mathematik handeln, so sind höhere Rechnungsarten, in erster Linie die Differential- und Integral-Rechnung, auszuschlieſsen. Die Ansichten über die Möglichkeit dieser Ausschlieſsung sind sehr verschiedener Art.

Einerseits wird behauptet, alle Versuche, ohne jene Rechnungsarten auszukommen, seien als gescheitert zu betrachten. Auch Weisbach hätte es ursprünglich versucht, mit elementaren Hülfsmitteln sein Ziel zu erreichen, er wäre aber in den späteren Auflagen seiner Lehrbücher wieder zur Benutzung der höheren Analysis übergegangen. Erst kürzlich hat in einer Ingenieurversammlung ein hervorragender Lehrer einer technischen Hochschule irrtümlicher Weise behauptet, ohne Integralrechnung könnte man keine Trägheitsmomente ermitteln! Auch wird gesagt, jeder Versuch jener Art sei eine Rückkehr zu den Zeiten vor Leibnitz und Newton.

Andrerseits wird Gegenteiliges behauptet. So halten hervorragende Graphostatiker, wie Culmann, die Lehren der neueren Geometrie für weit wichtiger, für ein weit wesentlicheres Fundament der Ingenieurwissenschaften, als es jene höhere Analysis sein soll.

Niemand aber wird leugnen, daſs der bei weitem gröſste Teil der auf technischen Hochschulen vorgebildeten Civilingenieure die Lehren der höheren Analysis in der Praxis

nicht benutzt und alles Wesentliche davon aus dem Gedächtnis schwinden läfst. Und dies ist einer der Gründe, die Herrn Professor Riedler von der technischen Hochschule zu Charlottenburg veranlafst haben, in seinen bedeutungsvollen Vorträgen und Aufsätzen zur Reform der Ingenieur-Erziehung den Wunsch auszusprechen, die Hochschule möchte ihren Lehrgang in zwei Teile scheiden, einen mehr elementaren, mehr für die grofse Menge der künftigen Praktiker bestimmten, und einen darauf folgenden mit den Hülfsmitteln der höheren Analysis arbeitenden für die Elite derer, die befähigt sind, bis zu den Grenzen der technischen Wissenschaft vorzuschreiten und die Traditionen der Hochschule der Zukunft zu übermitteln.

Sind diese Reformwünsche berechtigt, so tritt die Notwendigkeit an uns heran, elementare Darstellungen der Ingenieur-Mathematik zu schaffen.

Wünschenswert waren solche schon seit langer Zeit, besonders für den Gebrauch der Lehrer an technischen Fachschulen, deren Aufgabe es ist, die Errungenschaften der Ingenieurwissenschaft den Schülern in elementarer Form zu übermitteln. Kennen sie nur die analytische Behandlungsweise, so wird der Unterricht sehr kümmerliche Resultate zeitigen. Auf der niederen Fachschule mag es zulässig sein, die Trägheitsmomente und Widerstandsmomente ohne Beweis anzugeben, auf der mittleren Fachschule aber sollte keine Formel unbewiesen übermittelt werden. Dafs es einfache Beweise giebt, wird auch das vorliegende Buch zeigen.

Wünschenswert aber ist ein Elementarbuch der technischen Mathematik auch für jeden Praktiker, der nur elementar rechnen will, möge er nun auf der Hochschule, oder nur auf der Fachschule vorgebildet worden sein. Und warum soll der Studierende der Hochschule über die wichtigsten Begriffe der Technik erst informiert werden, nachdem er die Differential- und Integralrechnung absolviert hat?

Somit hat der Verfasser keinen Anlafs, einen neuen Versuch elementarer Darstellung zu scheuen.

Aber nicht nur die Differential- und Integralrechnung, sondern auch die neuere Funktionentheorie und die Zahlentheorie sind auszuschliefsen, wenn der elementare Charakter der Darstellung nicht aufgegeben werden soll.

Es sei ausdrücklich erklärt, dafs durch diese Ausschliefsung der hohe Wert der analytischen Darstellungsmethode in keiner Weise herabgesetzt werden soll. Es sei zugestanden, dafs die Sprache der höheren Analysis eine kürzere Ausdrucksweise ermöglicht, dafs ihre Strenge hoch über der einer elementaren Behandlung steht, und vor allem, dafs sie weit leistungsfähiger ist, als diese.

Aber „Eines schickt sich nicht für alle“. Und wie viele Praktiker

studieren wohl die Festigkeitslehre nach Grashoff oder Clebsch? Die Zahl dürfte eine sehr geringe sein.

Eine Art von Grenzgebiet zwischen der niederen und höheren Mathematik bildet die Koordinatenlehre, die man in wenig treffender Weise als analytische Geometrie bezeichnet, obwohl sie sowohl analytisch, als auch synthetisch behandelt werden kann und in der Regel nach letzterer Methode behandelt wird. Vollständig können die Cartesischen Koordinaten hier nicht entbehrt werden, aber es soll von diesem Gebiete nicht mehr vorausgesetzt werden, als z. B. jeder Gymnasialprimaner weifs. Dasselbe gilt von den Polarkoordinaten.

Damit ist denn auch die Grenze nach oben hin für das vorliegende Lehrbuch festgesetzt.

Es fragt sich nun, mit welchen Gegenständen sich die Ingenieur-Mathematik zu befassen hat.

In erster Linie handelt es sich um die Inhaltsbestimmung derjenigen Flächen, die als Querschnittsformen, als Geschwindigkeitsdiagramme, Druckdiagramme, Potentialdiagramme, Arbeitsdiagramme und dgl. dem Techniker täglich vor die Augen kommen. Es handelt sich ferner um die Bestimmung der statischen Momente, der Schwerpunktslagen, der axialen und polaren Trägheitsmomente und der Centrifugalmomente jener Querschnittsformen.

Es könnte eingewandt werden, dafs diese Dinge in die Mechanik gehörten. Dies ist durchaus nicht ohne weiteres zuzugeben. Die barycentrischen Berechnungen sind seit Guldin und Möbius eine Domäne der Mathematik geworden. Drehungskörper, Schraubengewinde, abgeschrägte Cylinder und Prismen u. dgl. werden mit Hülfe des Schwerpunktes berechnet, der als Punkt mittleren Abstandes von jeder beliebigen Ebene nicht mechanisch, sondern rein mathematisch definiert werden kann. Körperschwerpunkte aber werden in vielen Fällen mit Hülfe der Trägheitsmomente berechnet. Sowohl die statischen Momente, als auch die Trägheitsmomente und Centrifugalmomente lassen sich durch Flächen- und Körperdiagramme veranschaulichen, so dafs die Lösungen in das Gebiet der Planimetrie oder Stereometrie verlegt werden. Eine grofse Anzahl von Sätzen der Raumlehre kann man mit Hülfe der Schwerpunkte, der statischen Momente u. dgl. kürzer beweisen als auf jede andere Art. Die Franzosen besitzen schon längst eine „Géométrie des masses".

Gerade der Umstand, dafs jene Trägheitsmomente nicht nur für die Festigkeitslehre, sondern auch für die Lehre vom Angriffspunkte und von der Gröfse der Centrifugalkraft, für die Theorie des seitlichen Wasserdrucks, für die Lehre von der

Drehungsenergie, für die Lehre vom excentrischen Stofse, vom Pendel u. dgl. von Wichtigkeit sind und dafs sie auch in rein mathematischer Hinsicht — sogar für die Reihenlehre! — vielfach verwendet werden können, ist ein Beweis dafür, dafs es sich um einen rein mathematischen Begriff handelt, der von der speziellen mechanischen Deutung ganz unabhängig dasteht.

Ist dies der Fall, so dürfte es vorzuziehen sein, den Lehrer der Mechanik, der Festigkeitslehre u. s. w. dadurch zu entlasten, dafs solche Begriffe in den mathematischen Lehrstunden zur Behandlung kommen. Der eine Vorteil würde darin liegen, dafs der technische Fachlehrer sich dann eingehender mit praktisch wertvollen Dingen beschäftigen könnte, der andere darin, dafs der mathematische Unterricht ein mehr technisches Gewand annehmen und diejenigen Dinge ausscheiden würde, die mit der Technik nichts zu thun haben. Die Mathematik soll eben auf der Fachschule nicht um ihrer selbst willen studiert werden, sondern nur als Hülfswissenschaft auftreten. Geschieht dies, so wird gewissermafsen wirtschaftlicher gearbeitet. Auch darauf sei hingedeutet, dafs die Lehrbücher der Festigkeitslehre und der Mechanik in der Regel allzu umfangreich sind, und zwar deshalb, weil jedes eine grofse Menge mathematischen Ballastes mit sich schleppt, der besser in mathematischen Lehrbüchern bearbeitet würde.

Ein zweiter Punkt ist die Behandlung der für die Technik wichtigsten Körper bezüglich des Inhalts, der statischen Momente und Schwerpunktslagen, der Trägheits- und Centrifugalmomente und was mit diesen zusammenhängt.

Alle diese Dinge können nach rechnender und graphischer Methode behandelt werden. Da bald der eine, bald der andere Weg der bessere ist, sollen hier beide Methoden berücksichtigt werden. Da ferner jede von beiden sehr verschiedenartiger Behandlung fähig ist und eine Methodenlehre der technischen Mathematik noch nicht geschrieben vorliegt, so soll jener Mannigfaltigkeit hier Rechnung getragen werden.

Die bis hierher genannten Gegenstände sind es, die den Inhalt des ersten Bandes ausmachen.

Der zweite Band soll vor allem eine technische Kurvenlehre in elementarer Darstellung bringen. Die Zahnradkonstruktionen verlangen die Kenntnis der Evoluten und Evolventen, der cyklischen Kurven aller Art. Die Festigkeitslehre beansprucht Kenntnis der wichtigsten elastischen Linien, auch gewisser Spiralen. Die adiabatischen Expansionsdiagramme werden durch Parabeln höherer Ordnung begrenzt, die man nicht gerade treffend als polytropische Curven bezeichnet hat. In der graphischen Statik gewinnen die Lemniskaten und Cassinischen Kurven verschiedener Ord-

nung von Jahr zu Jahr an Bedeutung. Auch gewisse Elastizitätsprobleme und die Grundwassertheorie von Forchheimer machen ihre Kenntnis unentbehrlich. Die Kettenlinie beansprucht Vorkenntnisse über die logarithmischen Kurven, die in wichtigem Zusammenhange mit den logarithmischen Spiralen stehen. (Von den Kegelschnitten soll hier nicht besonders gesprochen werden.)

Schon der erste Band kann nicht umhin, einige Eigenschaften dieser Kurven elementar zu entwickeln. Es zeigt sich eben überall ihre Unentbehrlichkeit, die noch stärker hervortritt, wenn man auch die Phoronomie (Kinematik) in den Bereich der Untersuchungen ziehen will.

Vor allen Dingen fordert die Elektrotechnik eine elementare Behandlung der Potentialtheorie, die ebenfalls im zweiten Bande in Angriff genommen werden soll. In welchem Umfange dies geschehen wird, mag sich bei seinem Erscheinen zeigen. Jedenfalls soll von einem Rückschritt zu den Zeiten vor Leibnitz und Newton nicht die Rede sein.

Bisweilen wird der Kürze halber auf folgende Lehrbücher des Verfassers verwiesen werden:

1) Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik, 3 Bände.

2) Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildungen.

Beide sind in dem Verlage von B. G. Teubner in Leipzig erschienen.

Dagegen soll auf die in mehreren Zeitschriften zerstreuten Abhandlungen des Verfassers im allgemeinen nicht hingewiesen werden, da diese doch nur wenigen Technikern vollständig zugänglich sein würden.

An jeder Stelle soll durch eingestreute Bemerkungen und zweckmäfsige Beispiele gezeigt werden, inwiefern jeder neue Begriff und jede neue Methode für den Schüler ein wahrer Hebel zur Bewältigung neuer Aufgaben wird. Die entsprechenden Theorien der Mechanik werden selbstverständlich an solchen Stellen nicht entwickelt, da dies dem Fachunterrichte überlassen bleiben mufs. Der Schüler soll nur erfahren, nach welcher Richtung hin die Aufgaben liegen, an denen er seine Kräfte versuchen kann und soll.

Durch die vorstehenden Bemerkungen und durch das Inhaltsverzeichnis wird die Absicht des Werkes einigermafsen klar gelegt sein. Nur noch ein Punkt soll bemerkt werden: dafs von systematischer Anordnung und Lückenlosigkeit hier vollständig abzusehen ist. Während die theoretische Wissenschaft der Reihe nach von Punkten und Punktsystemen, Linien und Liniensystemen, Flächen und Flächensystemen und endlich von den Körpern zu handeln hat,

braucht der Techniker im wesentlichen nur die Flächen und Körper. In der Regel wird immer dasjenige vorangestellt, was das Notwendigste ist, im übrigen der Fortschritt vom Leichteren zum Schwereren eingehalten. Wem ein Kapitel zu weit zu gehen scheint, der überschlage es. Im allgemeinen sind die einzelnen Abschnitte so selbständig behandelt, dass ein Zurückgreifen auf das Überschlagene nur selten nötig werden wird. Um dies zu erreichen, waren einige Wiederhelungen unvermeidlich, sie werden aber das Studium erleichtern.

Die fünf ersten Abschnitte enthalten im wesentlichen den Lehrgang, den der Verfasser seit längeren Jahren an der von ihm geleiteten Fachschule eingehalten hat. Wissenschaftlich Neues wird man dort nicht erwarten, nur die methodische Behandlung und die ausgiebige Verwendung der geometrischen und stereometrischen Veranschaulichung mag hier und dort einiges Neue bieten. Dort steht man im wesentlichen auf dem Boden von Huyghens und Euler. Man kann mit den bis dahin angewandten elementaren Hülfsmitteln schon ziemlich weit vordringen.

Im sechsten Abschnitte wird der Versuch gemacht, die sogenannte lemniskatische Abbildung in elementarer Weise und unter Ausscheidung des Imaginären zu entwickeln und für die Theorie der Polarmomente erster und zweiter Ordnung zu verwenden. Den ersten Anstofs dazu hat Siebeck im zehnten Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Seite 80, gegeben. In der „Theorie der isogonalen Verwandtschaften“ hat auch der Verfasser auf diesen Punkt aufmerksam gemacht. Da aber von technischer Seite auf diese Anregungen nicht eingegangen zu sein scheint, sind hier mehrere Beispiele ausgeführt worden, aus denen sich die Fruchtbarkeit dieses Gedankens ergiebt. Einige Andeutungen über andere Transformationen, die für die technische Wissenschaft verwendbar sind, werden nicht unwillkommen sein.

Der siebente Abschnitt bringt eine Zusammenstellung der graphischen Methoden im Anschlufs an Culmann, Mohr, Land, Reye und Nehls. In dieser Hinsicht hat schon Herr Oberlehrer Kosch im Programm der Ober-Realschule zu Breslau vom Jahre 1895 eine wertvolle Zusammenstellung und Bearbeitung geliefert, auf die an dieser Stelle empfehlend aufmerksam gemacht sei. Einiges davon konnte hier benutzt werden.

Was die Übungsbeispiele anbetrifft, so entstammen diese sämtlich dem Unterrichtsbetriebe des Verfassers, wobei jedoch nicht ausgeschlossen ist, dafs einige wenige Zahlenangaben hervorragenderen Lehrbüchern, z. B. dem Konstrukteur von Reuleaux, entnommen wurden.

Die deutsche Litteratur über das im ersten Bande behandelte Wissensgebiet war dem Verfasser fast vollständig zugänglich. Dagegen

war es ihm versagt, sich über die Fortschritte der französischen und englichen Forschung eingehend genug zu informieren, obwohl ihm bekannt ist, dafs z. B. Townsend und namentlich auch Hâton de la Goupillière erfolgreich gearbeitet haben. Um jedoch die Arbeiten möglichst vollständig bekannt zu geben, sei die einschlagende Litteratur hier zusammengestellt.

Zunächst haben wir Werke über Mechanik von Euler, Poisson, Poinsot, Poncelet, Navier, Coriolis, Whewell, Mosely, Redtenbacher (Resultate), Weisbach, Eytelwein, Gerstner, Duhamel, Broch, Delaunay, Rankine, Somoff, Schlömilch, Schell, Culmann (graph. Statik), die sämtlich auf die Trägheitsmomente eingehen. Bahnbrechend war Poinsot: Théorie nouvelle de la rotation des corps, Liouvilles Journ. de Math. XVI, wo auf Seite 58 das erste Centralellipsoid eingeführt wird. Das zweite Trägheitsellipsoid wird eingeführt von Clebsch im 57. Bande des Crell. Journals, Seite 401, und darauf von Culmann verwertet.

Deutsche Abhandlungen über die Trägheitsmomente sind folgende:

Küpper: Theorie der Trägheitsmomente, Zeitschrift für Mathematik und Physik II, Seite 73 und Seite 338.

Reye: Beitrag zu der Lehre von den Trägheitsmomenten. Ebenda X, Seite 432.

Siebeck: Über eine allgemeine Darstellung der Trägheitsmomente ebener Figuren durch Zeichnung. Ebenda X, Seite 80 und 81. (Im Resultate mufs dort der Faktor 4 an Stelle von 2 treten!)

Mehmke: Einfache Darstellung des Trägheitsmomentes von Körpern. Ebenda XXIX, 6.

Reye: Einfache Darstellung der Trägheitsmomente ebener Figuren. Zeitschrift d. V. Deutscher Ingenieure XIX, Seite 401.

Mohr: Über die Bestimmung und die graphische Darstellung von Trägheitsmomenten ebener Flächen. Civil-Ingenieur XXIII, Heft 1.

Land: Über die Berechnung und bildliche Darstellung von Trägheits- und Centrifugalmomenten ebener Massenfiguren. Ebenda XXXIV, Heft 2.

Hesse: Analytische Geometrie des Raumes. Vorlesung 25 und 26. Imaginäres Bild des Systems.

Weinmeister: Elementar-mathematische Bestimmung der Trägheitsmomente ebener homogener Flächenstücke. Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht IV, Heft 6.

Holzmüller: Mechanisch-technische Plaudereien. Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, seit 1889.

Zehme: Gewerbeschulprogramm, Hagen, 1858. Über elementare Bestimmung der Trägheitsmomente.

Schlömilch: Über die Bestimmung der Massen und Trägheits-

momente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften II, Seite 377.

Bantlin: Elementare Ableitung der Trägheitsmomente. Zeitschr. d. V. Deutscher Ingenieure Bd. 40, Seite 950 und 1054.

Französische Abhandlungen:

Binet: Mémoire sur la théorie des axes conjugués et des moments d'inertie. Journal de l'École polytechnique XVI, Seite 127.

Guilbert: Note sur les axes principaux des corps. Ebenda XXV.

Hâton de la Goupillière: Mémoire sur une théorie nouvelle de la géométrie des masses. Ebenda XXXVII.

Somoff: Mémoire sur les axes et les moments principaux des corps homogènes. Bull. de la cl. phys. math. de l'Académie de St. Pétersbourg XII, pag. 12 und 17.

Englische Abhandlungen:

W. Thomson: On the principal axes of a solid body. Cambridge and Dublin Math. Journal I, pag. 127, 195, and Cayley: Note on a geometrical theoreme contained in the prec. paper. Vol. I, 207.

R. Townsend: On the principal axes of a body, their moment of inertia and distribution in space. Ebenda I, pag. 202; II, pag. 19, 140, 241.

R. Townsend: On the moment of inertia of a ring with respect to its axis of revolution. Ebenda X, pag. 203.

Routh: Elementary treatise on the dynamics of a System of rigid bodies. 3. Edit. London, 1877.

Rankine: A manual of applied mechanics, 3. Edit., pag. 522. Dort wird der Name Deviationsmoment eingeführt.

Die Litteratur über den Gegenstand ist also eine sehr umfangreiche, aber nur wenige der genannten Werke stehen auf elementarer Grundlage. Möge das Bestreben des Verfassers, möglichst viele der Errungenschaften der Ingenieurwissenschaft der elementaren Behandlung zugänglich zu machen, einigermafsen gelungen sein, obwohl bei dieser Behandlungsweise mancherlei Schwierigkeiten zu überwinden waren und mancher Weg mühsam aufgedeckt werden mufste. Möge ferner das vorliegende Buch den Studierenden des ersten Semesters zur schnelleren Einführung in die wesentlichsten mathematischen Begriffe der Ingenieurwissenschaft dienen, dem Fachschullehrer ein brauchbares Hülfsmittel für die elementare Unterrichtsmethode sein und dem praktischen Konstrukteur, der nicht mit den Methoden der höheren Analysis arbeiten will oder kann, zeigen, dafs sich doch ein recht grofser Teil der wichtigsten Resultate in einfacher Weise ableiten läfst.

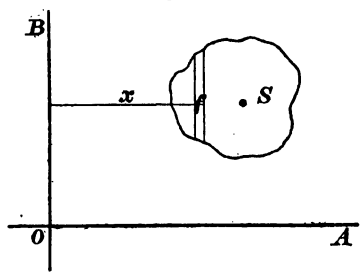
Abschnitt I.

Schwerpunktsbestimmungen für ebene Flächen.

1) In der technischen Festigkeitslehre sind die Querschnitte von Trägern auf die Lage ihrer Biegungsachsen zu untersuchen. Diese Achsen gehen stets durch den Schwerpunkt der Fläche, und auf sie werden die Trägheitsmomente und Widerstandsmomente bezogen. Auch für Untersuchungen aus dem Gebiete der Centrifugalkraft und eine Reihe anderer Gegenstände der Mechanik ist die Kenntnis der Flächenschwerpunkte nötig. Die Bestimmung ihrer Lage kann auf verschiedene Weise erfolgen.

Man kann z. B. folgenden Satz der Mechanik benutzen: Die Summe der statischen Momente der einzelnen Flächenteile ist gleich dem statischen Momente der Gesamtfläche.

Fig. 1.



In Fig. 1 seien OA und OB beliebig gewählte Koordinatenachsen. Man zerlege die gegebene Fläche in lauter senkrechte Streifen f. Die Entfernung jedes unendlich schmal zu denkenden Streifens von der y-Achse OB sei gleich x, so dafs fx das statische Moment des Streifens in Bezug auf die Y-Achse ist. Das gesamte statische Moment der Fläche ist also eine Summe solcher Ausdrücke fx, die mit $\sum fx$ bezeichnet werden soll. Ist nun S der Schwerpunkt der Fläche F und x_s sein Abstand von der Achse OB, so ist das statische Moment der Fläche auch gleich $x_s F$, so dafs

$$x_s F = \sum fx$$

ist. Daraus folgt als Schwerpunktsabstand

$$x_s = \frac{\sum fx}{F}.$$

Bezeichnet man das Moment in Bezug auf die Y-Achse mit M_y, das in Bezug auf die X-Achse genommene, welches mit Hülfe von Horizontalstreifen berechnet wird, mit M_x, so hat man die Gleichungen

$$x_s = \frac{M_y}{F}, \quad y_s = \frac{M_x}{F},$$

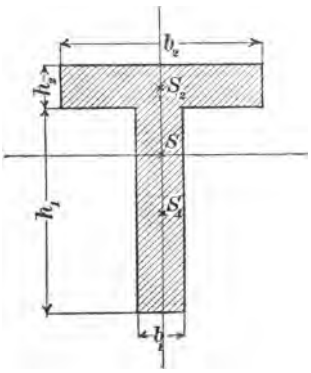
die zur Bestimmung des Schwerpunkts genügen.

Bemerkung. Verschiebt man die Y-Achse um $-e$, so geht $\sum fx$ über in $\sum f(x+e) = \sum fx + \sum fe = \sum fx + eF$, d. h. das statische Moment der Fläche wächst um eF. Davon kann man bisweilen Anwendung machen.

2) Ist der Schwerpunkt einzelner Flächentheile durch Symmetrieverhältnisse ohne weiteres bestimmt, so treten Vereinfachungen ein.

Beispiel. Für den T-Träger kann die Bestimmung folgendermafsen geschehen.

Fig. 2.



In Bezug auf die Grundlinie b_1 ist in Fig. 2 die Summe der statischen Momente der Einzelrechtecke F_1 und F_2 gleich dem Momente der Gesamtfläche F, also ist

$$h_s F = e_1 F_1 + e_2 F_2,$$

wo

$$e_1 = \frac{h_1}{2}, \; e_2 = h_1 + \frac{h_2}{2} = \frac{2h_1 + h_2}{2}$$

ist. Man erhält

$$h_s(b_1 h_1 + b_2 h_2) = \frac{h_1}{2} b_1 h_1 + \frac{2h_1 + h_2}{2} b_2 h_2,$$

so dafs

$$h_s = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2h_1 + h_2)}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)}$$

ist. Dafs der Schwerpunkt in der Symmetrieachse liegt, ist selbstverständlich.

3) Für das in Fig. 3 dargestellte Winkeleisen ist ebenso

$$y_s = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2h_1 + h_2)}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)}.$$

Für x_s erhält man auf entsprechendem Wege

$$x_s = \frac{b_1^2 h_1 + b_2^2 h_2}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)}.$$

Findet wie in Fig. 4 Symmetrie gegen die Gerade AB statt, so braucht man nur x_s zu berechnen. Dabei ist $BS = x_s\sqrt{2}$. Ein-

Fig. 3.

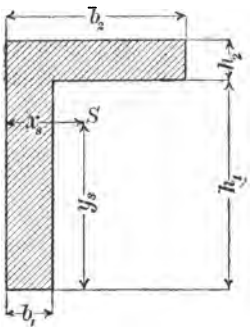
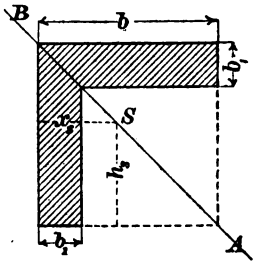


Fig. 4.



facher ergiebt sich jetzt h_s auf folgendem Wege: Es handelt sich um die Differenz zweier Quadrate, so dafs man direkt schreiben kann

$$h_s = \frac{b^3 - b_2^3}{2\left(b^2 - b_2^2\right)}$$

oder auch, indem man oben und unten durch $b - b_2$ dividiert,

$$h_s = \frac{b^2 + bb_2 + b_2^2}{2\,(b + b_2)},$$

wobei $b - b_1 = b_2$ gesetzt ist.

Fig. 5.

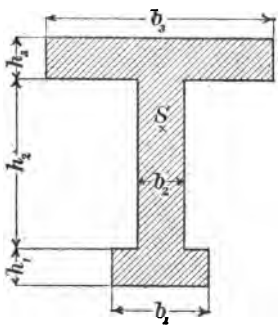
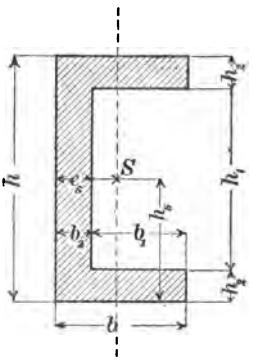


Fig. 6.



In entsprechender Weise ergiebt sich für Fig. 5 unter Benutzung der Grundlinie als Achse der Momente die Schwerpunktshöhe

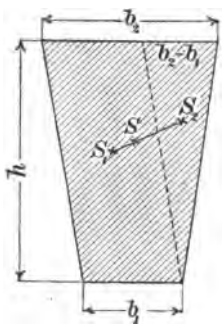
$$h_s = \frac{b_1h_1^2 + b_2h_2\left(2h_1 + h_2\right) + b_3h_3\left(2h_1 + 2h_2 + h_3\right)}{2\,(b_1h_1 + b_2h_2 + b_3h_3)}.$$

Für das ⊏-Eisen (lies U-Eisen) wird (Fig. 6)

$$h_s = \frac{h}{2}, \quad e_s = \frac{\frac{2h_2b^2}{2} + \frac{h_1b_2^2}{2}}{2h_2b + h_1b_2} = \frac{2h_2b^2 + h_1b_2^2}{2(2h_2b + h_1b_2)}.$$

4) Trapez. Für das Parallelogramm ist das statische Moment in Bezug auf die Grundfläche gleich $\frac{b_1h^2}{2}$, für das Dreieck, dessen Schwerpunkt in der Höhe $\frac{2}{3}h$ liegt, ist das Moment

Fig. 7.



$$\frac{b_2 - b_1}{2} h \cdot \frac{2}{3} h = \frac{h^2}{3}(b_2 - b_1),$$

das Gesamtmoment also

$$\frac{3b_1h^2 + 2h^2(b_2 - b_1)}{6} = \frac{h^2}{6}(b_1 + 2b_2).$$

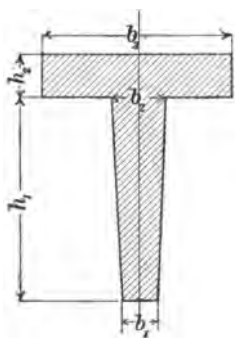
Die Schwerpunktshöhe wird daher

$$h_s = \frac{\frac{h^2}{6}(b_1 + 2b_2)}{\frac{b_1 + b_2}{2} h} = \frac{h(b_1 + 2b_1)}{3(b_1 + b_2)}.$$

Der Schwerpunkt liegt stets auf der einen Mittellinie des Trapezes, mag es symmetrisch oder unsymmetrisch sein.

Für den nebenstehenden Querschnitt wird

Fig. 8.



$$h_s = \frac{\frac{h_1^2}{6}(b_1 + 2b_2) + \left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right) b_3h_2}{\frac{b_1 + b_2}{2} h_1 + b_3h_2}$$

$$= \frac{h_1^2(b_1 + 2b_2) + (2h_1 + h_2)\, 3b_3h_2}{3[(b_1 + b_2)h_1 + 2b_3h_2]}.$$

5) In einzelnen Fällen benutzt man die Guldinsche Regel für Drehungskörper, die sich folgendermafsen entwickeln läfst:

Dreht man das Rechteck $ABCD$ in Fig. 9 um eine zu AD parallele Achse KL, so entsteht ein Hohlcylinder vom Inhalte

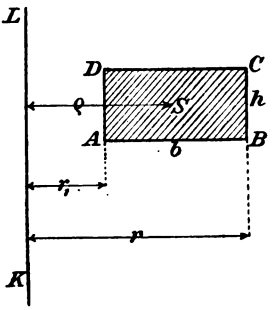
$$J = \pi\left(r^2 - r_1^2\right)h = \pi\left(r + r_1\right)\left(r - r_1\right)h = 2\pi\frac{r + r_1}{2}bh = 2\pi\varrho F,$$

wo F die Rechtecksfläche und ϱ ihr Schwerpunktsabstand von der Achse ist.

Besteht eine Fläche aus mehreren Rechtecken von solcher Lage, deren Flächen F_1, F_2, F_3 u. s. w., deren Schwerpunktsabstände ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 u. s. w. sind, so hat der ganze Drehungskörper den Inhalt

$$J = 2\varrho_1\pi F_1 + 2\varrho_2\pi F_2 + 2\varrho_3\pi F_3 + \cdots,$$

Fig. 9.



oder

$$J = 2\pi\,[\varrho_1 F_1 + \varrho_2 F_2 + \varrho_3 F_3 + \cdots].$$

Ist nun $F = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots$ die Gesamtfläche und ϱ ihr Schwerpunktsabstand von der Achse, so ist nach dem Gesetz der statischen Momente

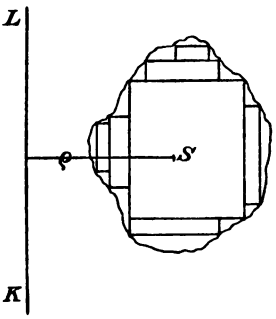
$$\varrho F = \varrho_1 F_1 + \varrho_2 F_2 + \varrho_3 F_3 + \cdots,$$

demnach ist der Inhalt des Drehungskörpers

$$J = 2\varrho\pi F = \text{Schwerpunktsweg mal Fläche.}$$

Da nun jede ebene Fläche mit Rechtecken, die man zuletzt kleiner und kleiner zu nehmen hat, mit beliebiger Genauigkeit vollständig ausgefüllt werden kann, so gilt die Formel überhaupt von jeder ebenen Fläche, die um eine sie nicht schneidende Achse ihrer Ebene rotiert. Der eigentliche Grund des Satzes beruht darin, dafs S als Punkt mittleren Abstandes von der Achse KL den mittleren Drehungsweg zurücklegt, so dafs der Körperinhalt ist: bewegte Fläche mal mittlerer Drehungsweg.

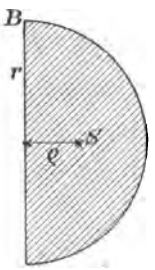
Fig. 10.



Kennt man nun den Flächeninhalt F und den Inhalt J des durch die Drehung entstehenden Körpers, so ergiebt sich der eine Schwerpunktsabstand als

$$\varrho = \frac{J}{2\pi F}.$$

Fig. 11.

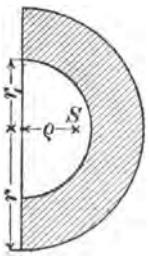


6) Halbkreisfläche. Durch Drehung um AB würde eine Kugel vom Inhalte $\frac{4}{3}r^3\pi$ entstehen, die Fläche ist: $F = \frac{r^2\pi}{2}$, der Schwerpunktsabstand wird

$$\varrho = \frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{2\pi\frac{r^2\pi}{2}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Halber Kreisring. Die entsprechende Betrachtung giebt

Fig. 12.



$$\varrho = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(r^3 - r_1^3\right)}{2\pi\frac{\left(r^2 - r_1^2\right)\pi}{2}} = \frac{4\left(r^3 - r_1^3\right)}{3\pi\left(r^2 - r_1^2\right)}.$$

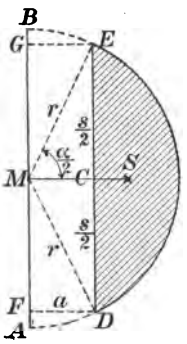
Man könnte noch oben und unten durch $r - r_1$ dividieren, was auf

$$\varrho = \frac{4\left(r^2 + rr_1 + r_1^2\right)}{3\pi\left(r + r_1\right)}$$

führen würde.

7) Kreis-Segment vom Radius r und der Sehne s. Durch Drehung um den Durchmesser AB, der zur Sehne parallel anzunehmen ist, entsteht ein Körper, dessen Inhalt gleich dem einer Kugel mit dem Radius $CD = \frac{s}{2}$ ist. Die Formel für die Kugelschicht von der Höhe s ist nämlich (Method. Lehrbuch, II, Stereom. 46)

Fig. 13.



$$J_1 = \frac{\pi s}{6}\left(3a^2 + 3b^3 + s^2\right),$$

oder, da hier $a = b = FD = GE$ ist,

$$J_1 = \frac{\pi s}{6}\left(6a^2 + s^2\right) = \pi a^2 s + \frac{\pi s^3}{6}.$$

Hiervon ist der durch Drehung des Rechtecks $FDEG$ entstehende Cylinder abzuziehen, dessen Inhalt gleich $a^2\pi s$ ist. Demnach bleibt für den zu untersuchenden Körper übrig

$$J = \frac{\pi s^3}{6}.$$

Demnach wird der Schwerpunktsabstand

$$\varrho = \frac{\frac{\pi s^3}{6}}{2\pi F} = \frac{s^3}{12F}.$$

F berechnet sich mit Hülfe des Sektors $MDE = r^2\pi\frac{\alpha^0}{360^0}$, von dem das Dreieck MDE abzuziehen ist. Hier bestimmt sich α mit Hülfe der Gleichung $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2r}$. Der Inhalt des Dreiecks kann, da im allgemeinen die Trigonometrie doch nicht zu vermeiden ist, als $F_1 = \frac{1}{2}r^2\sin\alpha$ angegeben werden, so dafs

$$F = r^2\pi\frac{\alpha}{360} - \frac{r^2}{2}\sin\alpha = \frac{r^2}{2}\left(\pi\frac{\alpha}{180} - \sin\alpha\right)$$

einzusetzen ist. Die Schlufsformel also wird

$$\varrho = \frac{s^2}{6r^2\left(\pi\frac{\alpha}{180} - \sin\alpha\right)},$$

wo α aus $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2r}$ zu bestimmen ist.

9) Bisweilen kann man eine Methode verwenden, bei der die Kenntnis der **Guldinschen Regel für Drehungsflächen** nöthig ist.

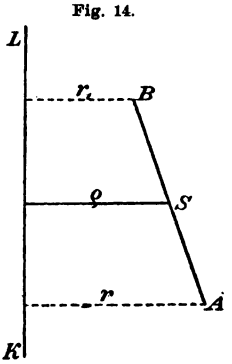
Man kann diese folgendermafsen entwickeln.

Wird die Gerade AB von der Länge s um eine Achse KL derselben Ebene gedreht, so entsteht der Kegelmantel

$$M = (r + r_1)\pi s = 2\frac{r + r_1}{2}\pi s = 2\varrho\pi s,$$

wo wiederum ϱ der Schwerpunktsabstand von der Achse ist.

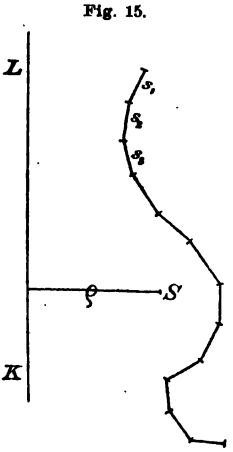
Fig. 14.



Rotiert eine Folge von geraden Linien derselben Ebene um eine Achse dieser Ebene, sind ferner $s_1, s_2, s_3, \ldots$ die Längen der Geraden, $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ ihre Schwerpunktsabstände von der Achse, so wird die Mantelfläche des Drehungskörpers

$$M = 2\varrho_1\pi s_1 + 2\varrho_2\pi s_2 + 2\varrho_3\pi s_3 + \cdots$$
$$= 2\pi[\varrho_1 s_1 + \varrho_2 s_2 + \varrho_3 s_3 + \cdots].$$

Fig. 15.



Nach dem Gesetz der statischen Momente ist aber die Klammer identisch mit ϱs, wo

$$s = s_1 + s_2 + s_3 \ldots$$

die Länge des gesamten Linienzugs, ϱ sein Schwerpunktsabstand von der Achse ist, demnach ist die Mantelfläche

$$M = 2\varrho\pi s = \text{Schwerpunktsweg mal Länge des Linienzugs.}$$

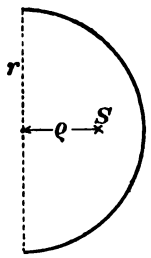
Handelt es sich um eine krumme Linie der Ebene, so gilt der Satz ebenfalls, denn man darf diese als eine Reihe kleiner gerader Linien betrachten.

Kennt man die Drehungsfläche F und die Bogenlänge b, so ergiebt sich für den Schwerpunkt der Achsenabstand

$$\varrho = \frac{F}{2\pi b}.$$

9) Für den Halbkreisbogen ist

Fig. 16.



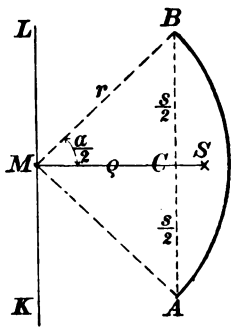
$$\varrho = \frac{4r^2\pi}{2\pi b} = \frac{4r^2\pi}{2\pi \cdot r\pi} = \frac{2r}{\pi}.$$

Für den Kreisbogen b vom Radius r, dessen Sehne sich als s berechnet, giebt die Drehung um KL eine Kugelzone von der Fläche $2r\pi s$. Demnach ist die Schwerpunktsentfernung von M aus gerechnet (Fig. 17)

$$\varrho = \frac{2r\pi s}{2\pi b} = \frac{rs}{b}.$$

Hier ist $b : r\pi = \alpha^0 : 180^0$, d. h. $\alpha = \frac{b}{r\pi}\,180^0$, und $s = 2r \sin\frac{\alpha}{2}$, so dafs man schreiben kann

Fig. 17.



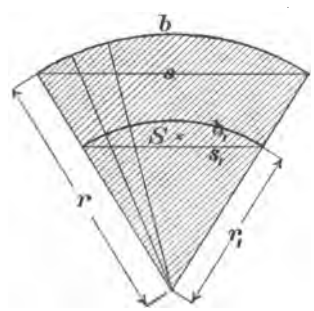
$$\varrho = \frac{2r^2 \sin\frac{\alpha}{2}}{b},$$

wo $\alpha = \frac{b}{r\pi}\,180^0$ ist.

10) Dieses Resultat kann für Flächen benutzt werden, z. B. für den Kreissektor mit Radius r und Bogen b.

Denkt man sich diesen in zahlreiche „Dreiecke“ zerlegt, deren Basis man dann als geradlinig annehmen darf, so liegen die Einzelschwerpunkte in der Entfernung $\frac{2}{3}r$ von M. Bei gleichen Teilsektoren liegen sie gleichmäfsig verteilt, also mufs der Schwerpunkt der Gesamtfläche mit dem des entsprechenden Bogens übereinstimmen. Man erhält

Fig. 18.



$$\varrho = \frac{r_1 s_1}{b_1} = \frac{\frac{2}{3}r\,\frac{2}{3}s}{\frac{2}{3}b} = \frac{2rs}{3b},$$

oder

$$\varrho = \frac{2r\,2r\sin\frac{\alpha}{2}}{3 \cdot 2r\pi\,\frac{\alpha}{360}} = \frac{240\,r\sin\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}.$$

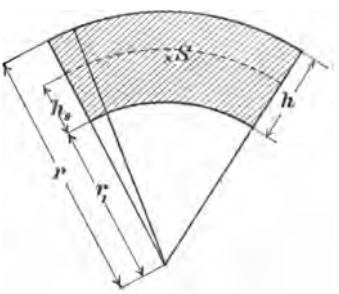
Über s ist dieselbe Bemerkung zu machen, wie vorher.

Man kann das Resultat auch mit Hülfe des Kreissegments und des Dreiecks finden. Für $\alpha = 180^0$ ergiebt sich das unter 6) für den Halbkreis abgeleitete Resultat.

11) Sektor der Ringfläche mit r, r_1, äufserem Bogen b und zugehöriger Sehne s.

Jeder Teilsektor kann als Trapez mit den Seiten $\frac{b_1}{n}$ und $\frac{b}{n}$ betrachtet werden, so dafs $h_s = \frac{h}{3}\frac{b_1 + 2b}{b_1 + b}$ ist, denn der Faktor $\frac{1}{n}$ hebt sich weg. Da aber $b_1 = b\frac{r_1}{r}$ ist, so erhält man, indem man $r - r_1$ für h setzt,

Fig. 19.



$$h_s = \frac{r - r_1}{3}\,\frac{b\frac{r_1}{r} + 2b}{b\frac{r_1}{r} + b} = \frac{r - r_1}{3}\,\frac{r_1 + 2r}{r_1 + r}.$$

Die Schwerpunkte der Teile liegen also auf einem Bogen vom Radius

$$r_3 = r_1 + h_s = \frac{3r_1(r + r_1) + (r - r_1)(r_1 + 2r)}{3(r + r_1)}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{r^2 + rr_1 + r_1^2}{r + r_1},$$

mit dem wie vorher zu verfahren ist. Man kann übrigens, indem man oben und unten mit $(r - r_1)$ multipliziert, auch schreiben $\frac{2}{3}\,\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2}$. Das Resultat ist nach 9)

$$x = \frac{r_s s_s}{b_s} = \frac{2s}{3b}\,\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2},$$

denn es ist $\frac{s_s}{b_s} = \frac{s}{b}$.

Ebenso einfach führt folgender Weg zum Ziele. Sind S und S_1 die beiden Sektorflächen, ϱ und ϱ_1 ihre Schwerpunktsradien, so ist für die Ringfläche F und ihre Schwerpunktsentfernung x (von M aus gerechnet)

$$xF = \varrho S - \varrho_1 S_1,$$

also

$$x = \frac{\varrho S - \varrho_1 S_1}{F} = \frac{\varrho S - \varrho_1 S_1}{S - S_1}.$$

Hier ist $S_1 = S\frac{r_1^2}{r^2}$, also, da auch $\varrho : \varrho_1 = r : r_1$ ist,

$$x = \frac{\varrho S - \frac{r_1}{r}\varrho S\frac{r_1^2}{r^2}}{S - S\frac{r_1^2}{r^2}} = \frac{\varrho}{r}\,\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2} = \frac{\frac{2}{3}\frac{rs}{b}}{r}\,\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2} = \frac{2s}{3b}\,\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2}$$

$$= \frac{2 \cdot 2r\sin\frac{\alpha}{2}}{3 \cdot 2r\pi\,\frac{\alpha}{360}}\,\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2} = \frac{240\sin\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}\,\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2}.$$

Für $\alpha = 180^0$ bestätigt sich das unter 6) für den halben Kreisring gefundene Resultat.

12) Verdoppelt man sämtliche Sehnen eines Kreises, die dem Durchmesser parallel sind, wobei die Symmetrie erhalten bleiben soll, so entsteht eine Ellipse. Der Schwerpunkt S der Halbkreisfläche fällt dabei mit dem der Ellipse zusammen, denn das Moment in

Fig. 20.

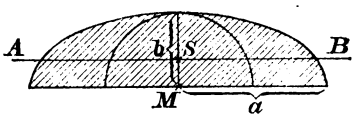
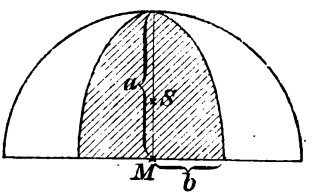


Fig. 21.

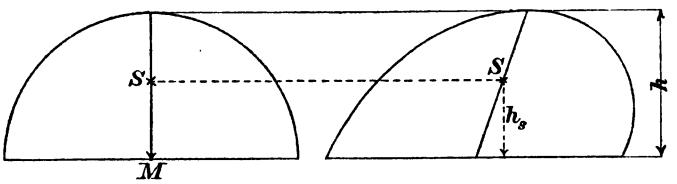


Bezug auf die Schwerpunktsachse hat bei der Verdoppelung den Wert Null beibehalten. Ebenso ist es, wenn man sämtliche Sehnen mit n multipliziert denkt.

Von der Verkürzung der Sehnen gilt dasselbe. Der Schwerpunkt liegt also im Abstande $\frac{4a}{3\pi}$ bezw. $\frac{4b}{3\pi}$ vom Durchmesser.

Dasselbe ist der Fall, wenn man die Sehnen des Halbkreises so verschiebt, dafs ihre Halbierungspunkte sich auf schräger Linie an-

Fig. 22.



ordnen. Auch dadurch entsteht eine halbe Ellipse, nur ist sie schief abgeschnitten. Ist h die senkrechte Höhe, so liegt der Schwerpunkt auf der Mittellinie im Abstande $h_s = \frac{4h}{3\pi}$ vom Durchmesser. — Ellipsensegmente lassen sich also stets auf Kreissegmente zurückführen.

13) Ist aus einer Fläche von einfacher Begrenzung ein Teil ausgeschnitten, so verfährt man wie im nebenstehenden Beispiele, wo ein Halbkreis aus dem Rechteck geschnitten ist. Das statische Moment der übrig bleibenden Fläche ist in Bezug auf AB

$$Fh_s = F_1 \cdot h_1 - F_2 \cdot h_2 = bh\,\frac{h}{2} - \frac{r^2\pi}{2} \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{bh^2}{2} - \frac{2r^3}{3},$$

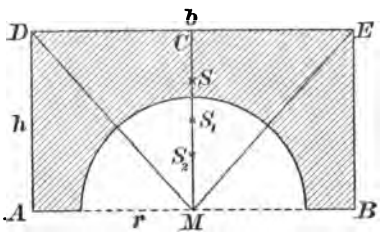
demnach ist

$$h_s = \frac{F_1 h_1 - F_2 h_2}{F_1 - F_2} = \frac{\frac{bh^2}{2} - \frac{2r^3}{3}}{bh - \frac{r^2\pi}{2}} = \frac{3bh^2 - 4r^3}{3(2bh - r^2\pi)}.$$

Zerschneidet man die Fläche durch MC, so liegt der Schwerpunkt für jeden Teil ebenso hoch, und zwar auf der Symmetrielinie MD bezw. ME.

Andere Berechnungsmethoden kommen später zur Sprache.

Fig. 23.



14) **Anwendungen.** a) Steht über einer Fläche eine senkrechte Säule, die durch eine Ebene schräg abgeschnitten ist, so ist der Inhalt des übrig bleibenden Körpers

$$J = F \cdot h_s,$$

wo h_s die Länge des im Schwerpunkte auf der Grundfläche errichteten Lotes bis zur Schrägfläche ist. Man bezeichnet diese Linie als die Mittellinie des Körpers. (Vgl. Method. Lehrbuch, II, Stereom. 61.)

b) Diesen Körper kann man als Diagrammkörper des seitlichen Wasserdrucks auffassen, der bekanntlich proportional der Tiefe zunimmt. Der Wasserdruck gegen eine senkrechte oder auch schräge ebene Wandfläche ist

$$P = F \cdot h_s,$$

z. B. in Tonnen, wenn F in Quadratmetern, die Schwerpunktstiefe h_s in Metern gegeben ist. (Die Druckresultante greift aber nicht im Schwerpunkte an.)

c) Ist die Säule oben und unten abgeschrägt, so hat man einen Normalschnitt zu führen. Ist dessen Fläche F und ist h_s die Länge des auf ihr im Schwerpunkte errichteten Lotes, von der einen Schrägfläche zur andern gemessen, so ist der Inhalt wiederum

$$J = F \cdot h_s.$$

d) Denkt man sich eine Fläche gleichmäfsig mit Masse belegt und um irgend eine in ihrer Ebene liegende oder diese schneidende Achse gedreht, so ist die entstehende Centrifugalkraft

$$P = mr\vartheta^2 = \frac{mv^2}{r} = \frac{4mr\pi^2}{t^2}.$$

Hier bedeutet r die Entfernung des Flächenschwerpunktes von der Achse, m die Masse, v die Geschwindigkeit der Schwerpunktsbewegung, ϑ die auf den Radius 1 reducierte Geschwindigkeit (Winkelgeschwindigkeit), t die Zeitdauer des einmaligen Umlaufs (Umlaufszeit).

(Der Angriffspunkt der Centrifugalkraft fällt aber im allgemeinen nicht mit dem Schwerpunkte zusammen.)

Die Centrifugalkraft ist Null, wenn die Achse durch den Schwerpunkt geht. Ihr positiver und negativer Teil aber können ein Kräftepaar bilden, welches in Bezug auf jeden Punkt der Achse ein konstantes Centrifugalmoment giebt, sodafs im allgemeinen kein Gleichgewichtszustand eintritt.

e) Denkt man sich die Fläche gleichmäfsig mit Masse belegt, so greift die Resultante der einzelnen Schwerkräfte im Schwerpunkte an. Das statische Moment in Bezug auf jede Drehungsachse ist also gleich dem Produkte aus der Schwerkraft und der Entfernung ihrer Richtungslinie von der Achse. Das statische Moment ist gleich Null, wenn jene Entfernung gleich Null ist, wenn z. B. die Achse durch den Schwerpunkt geht. Die horizontal liegende Fläche balanciert also, wenn sie im Schwerpunkte oder in zwei Punkten, deren Verbindungslinie durch den Schwerpunkt geht, unterstützt wird.

Der Schwerpunkt ist auch der Angriffspunkt der Resultante gleichmäfsig gegen eine Fläche wirkender Druckkräfte (z. B. Dampfdruck) oder Zugkräfte.

f) Die Guldinsche Regel $J = 2\varrho\pi F$ dient zur Inhaltsberechnung der Drehungskörper, zur Inhaltsberechnung der Schraubengewinde, und in der Form $\varrho = \frac{J}{2\pi F}$ zur Schwerpunktbestimmung ebener Flächen. Für Näherungsberechnungen bestimmt man den Schwerpunkt durch zwei Aufhängungen einer Schablone (z. B. von Blech) und benutzt ihn für die Inhaltsbestimmung der entsprechenden Körper.

g) Denkt man sich eine ebene Fläche gleichmäfsig mit Masse belegt und durch einen Stofs im luftleeren Raume vorwärts geschleudert, so bewegt sich ihr Schwerpunkt in einer Parabel, aufserdem aber treten Drehungsbewegungen ein. Im Weltraume würde die Bahn, die der Flächenschwerpunkt um einen anziehenden Weltkörper zurücklegt, ein Kegelschnitt sein, also Kreis, Ellipse, Parabel oder Hyperbel (Schwerpunktsprinzip).

h) Wird ein Balken ein Haken u. dgl. auf Biegung, eine Säule oder Strebe von gröfserer Länge auf Strebung beansprucht, so gehen die Biegungsachsen der Querschnitte durch die Schwerpunkte der Flächen.

i) Wird eine Welle auf Drehung beansprucht, so geschehen die Drehungen der einzelnen Querschnitte um die Flächenschwerpunkte.

k) Für die darstellende Geometrie ist von Wichtigkeit, dafs bei der Parallelprojektion einer ebenen Fläche ihr Schwerpunkt in den der neuen Fläche projiziert wird. (Bei der Parallelprojektion ebener Kurven ist dies im allgemeinen nicht der Fall, ebensowenig bei gewölbten Flächen.)

l) Mit Hülfe der Schwerpunktslehre kann man Sätze der Geometrie beweisen (barycentrischer Kalkül). So folgt z. B. der Satz,

dafs die Mittellinien des Dreiecks sich in einem Punkte schneiden, daraus, dafs die Fläche nur einen einzigen Schwerpunkt haben kann.

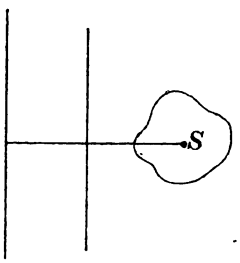
m) Bewegt sich eine ebene Fläche so, dafs ihr Schwerpunkt eine beliebige ebene oder räumliche Curve beschreibt, auf der die bewegte Fläche in jedem Punkte senkrecht steht, so ist der Inhalt des körperlichen Weges gleich dem Produkte aus Fläche und Schwerpunktsweg. (Durchdringen einander dabei Teile des Körpers, so ist der Durchdringungsraum doppelt bezw. mehrfach einzurechnen.) Dieser Satz ist z. B. von Bedeutung für die Berechnung der für Eisenbahndämme nötigen Erdmassen.

n) Bemerkung zur Guldinschen Regel. Verschiebt man die Achse parallel zu sich selbst um $-e$, so geht $J = 2\varrho F\pi$ über in

$$J_1 = 2(\varrho F + eF)\pi = J + 2eF\pi,$$

d. h. der Inhalt wächst um den eines Drehungskörpers, der entsteht, wenn die Fläche um eine Achse rotiert, die vom Schwerpunkte um e entfernt ist, oder er wächst um den Inhalt eines Cylinders, der über der Fläche steht und den Weg $2e\pi$ zur Höhe hat.

Fig. 24.



Dadurch werden Berechnungen gewisser Art unabhängig von der Kenntnis der Schwerpunktslage gemacht.

15) Graphische Schwerpunktbestimmungen.

Der Graphostatik verdanken wir neuere Methoden, die es dem exakten Zeichner ermöglichen, namentlich für Trägerquerschnitte die Schwerpunkte schnell aufzufinden. Einige Beispiele sollen dies erläutern.

Symmetrischer Trägerquerschnitt. (Figur 25.)

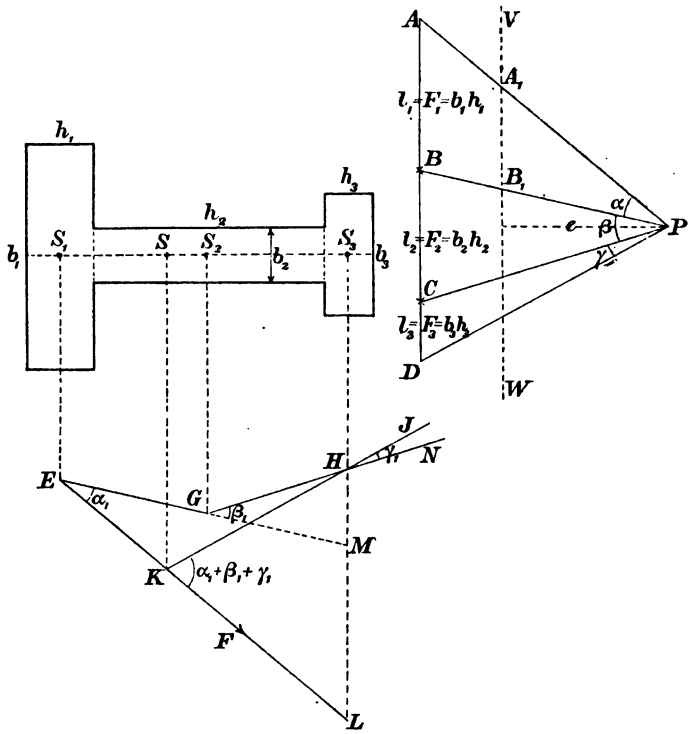
Die in S_1, S_2 und S_3 angreifenden „Kräfte“*) verhalten sich wie b_1h_1, b_2h_2 und b_3h_3, oder wie $F_1 : F_2 : F_3$. Man zeichne drei Senkrechte AB, BC, CD wie in der Figur, die sich wie diese Gröfsen verhalten. Dann nehme man einen beliebigen Punkt (Pol) an und verbinde ihn mit A, B, C und D.

Durch die Einzelschwerpunkte sind Senkrechte gelegt. An der zu S_1 gehörigen Senkrechten beginne man irgendwo, z. B. bei E, mit folgender Konstruktion: Man ziehe $EF \parallel AP$ und $EG \parallel BP$ bis zur Senkrechten durch S_2, sodann $GH \parallel CP$ bis zur Senkrechten durch S_3, zum Schlufs durch H eine Parallele zu PD. Letztere giebt mit EF einen Schnitt K, und senkrecht über diesem liegt der gesuchte Schwerpunkt S.

*) Man denke sich die Flächen homogen mit Masse belegt, so dafs man von Gewichten sprechen kann.

Beweis. Denkt man sich den Abstand des Punktes P von der Geraden AD als Einheit, so würde eine durch das Strahlenbüschel P gelegte Vertikale VW Abschnitte geben, deren Längen den statischen Momenten der Kräfte AB, BC und CD in Bezug auf den Punkt P

Fig. 25.



oder dem statischen Momente der in P angebrachten Kräfte in Bezug auf die Punkte der Geraden VW entsprechen, denn es ist z. B. $A_1B_1 : AB = e : 1$, folglich, wenn $l_1 = b_1h_1 = F$ ist, $A_1B_1 = e \cdot AB = eF_1$. Dieser sogenannte Kräfteplan veranschaulicht also zugleich, in welcher Weise die statischen Momente zunehmen, wenn man den Drehungspunkt des gedachten Hebels vom Angriffspunkte P der Kraft aus horizontal verschiebt.

Bei E ist davon Anwendung gemacht, denn durch die Parallelen ist $\sphericalangle \alpha_1 = \alpha$ dort angetragen. Der Winkelraum α_1 deutet an, wie das Moment von F_1 bei Verschiebung des Drehungspunktes nach rechts zunimmt.

Bei G tritt die neue Kraft F_2 hinzu, deren Momentzunahme dem Winkelraume HGM entspricht, wo $\beta_1 = \beta$ geworden ist. Bei H tritt

F_3 hinzu, dessen Momentzunahme durch den Winkelraum $JHN = \gamma_1 = \gamma$ dargestellt ist.

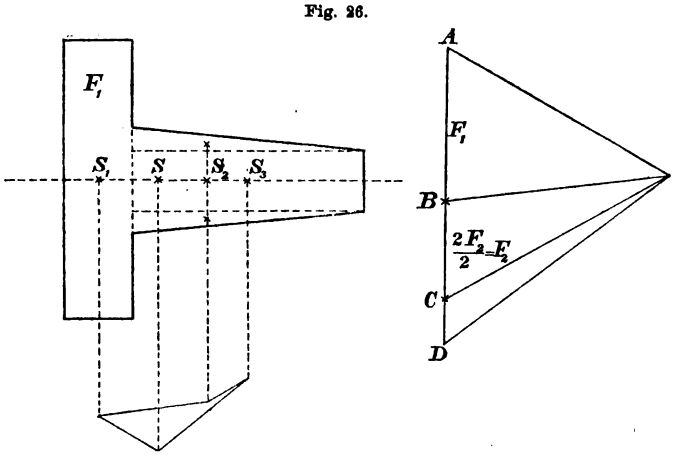
Der Winkelraum JKL mit dem Winkel $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha + \beta + \gamma$ veranschaulicht demnach die Zunahme der Gesamtkraft $F_1 + F_2 + F_3$ bei der Verschiebung nach rechts und zugleich die Abnahme bei der Verschiebung nach links. Bei K selbst aber ist der senkrechte Abstand der beiden Winkelschenkel gleich Null, also auch das Gesamtmoment gleich Null. In der durch K gelegten Senkrechten mufs demnach der Schwerpunkt liegen.

Bei der praktischen Ausführung läfst man das Überflüssige weg. Man bezeichnet das Strahlenbüschel als den Kräfteplan, das Vieleck als das Kräftepolygon oder Seilpolygon.

Die folgenden Figuren wird man ohne ausführliche Erläuterung verstehen.

16) In Fig. 26 ist das Trapez in zwei Dreiecke, jedes vom Inhalte $\frac{1}{2} F_2$ zerlegt, deren gemeinsamer Schwerpunkt S_2 ist.

Fig. 26.



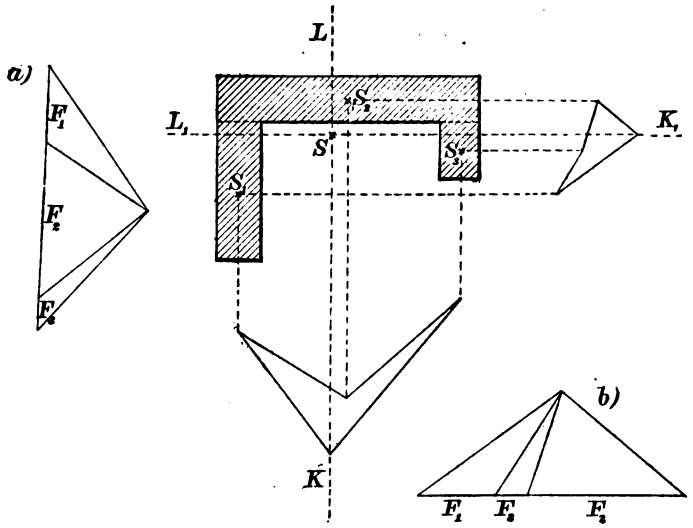
17) Unsymmetrischer Querschnitt.

In Figur 27 ist die Bestimmung für ein Winkeleisen durchgeführt. Hier mufste der Kräfteplan erst in der Stellung *a*) für die Vertikalen durch S_1, S_2, S_3, sodann in der Stellung *b*) für die jetzt in anderer Reihenfolge anzuordnenden Horizontalen durch S_1, S_3, S_2 benutzt werden. Die gewonnenen Linien KL und K_1L_1 geben durch ihren Schnitt den Schwerpunkt S.

18) Annäherungsverfahren für schwierigere Querschnitte. (Figur 28.)

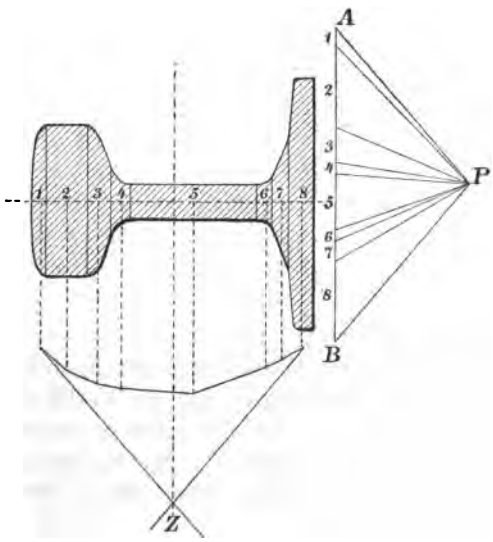
Man teile den Querschnitt in Trapeze und Rechtecke ein, deren

Fig. 27.



Inhalt mit Hülfe des Maſsstabs anzugeben ist. Auf AB trägt man eine Reihe von Strecken ab, die den Trapez- und Rechtecksinhalten proportional sind. Man verbindet einen beliebigen Pol P mit den Teilpunkten, taxiert die Schwerpunkte der Trapeze und zieht durch sie die Senkrechten, mit deren Hülfe das Kräftepolygon wie vorher zu zeichnen ist. Die Anfangs- und Schluſslinien geben den Schnittpunkt Z und damit die Senkrechte, in der der Schwerpunkt liegt.

Fig. 28.



Für praktische Zwecke wird es hinreichen, den Schwerpunkt durch zwei Aufhängungen der entsprechenden Blechschablone zu ermitteln. Das hier gelehrte Verfahren wird aber dadurch nicht überflüssig, da es gelegentlich der Trägheitsmomente noch anderweitige Verwendung finden soll.

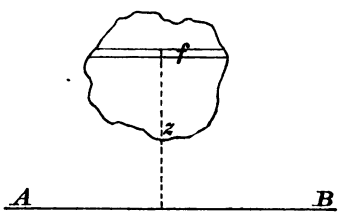
Abschnitt II.

Die einfachsten Trägheitsmomente ebener Flächen.

20) Begriff des axialen Trägheitsmomentes.

Figur 29 stellt eine beliebig gestaltete ebene Fläche F und eine in derselben Ebene liegende Achse AB dar. Man denke sich die Fläche in unendlich zahlreiche Parallelstreifen zerlegt, die selbstverständlich unendlich schmal werden. Diese sollen parallel zu AB sein. Während man das Produkt $f \cdot z$ aus jedem Streifen f und seinem Abstande z von der Achse AB als das statische Moment des Streifens in Bezug auf AB bezeichnete, nennt man das Produkt fz^2 aus f und dem Quadrate des Abstandes z das Trägheitsmoment des Streifens in Bezug auf die Achse AB. Der Grund für diese Benennung liegt in der Mechanik und kann hier noch nicht erörtert werden.

Fig. 29.



Wie ferner $M = \sum fz$ die Summe aller einzelnen statischen Momente, also zugleich das statische Moment der Gesamtfläche bedeutet, so bedeutet $T = \sum fz^2$ die Summe aller einzelnen Trägheitsmomente und zugleich das Trägheitsmoment der Gesamtfläche in Bezug auf die Achse AB.

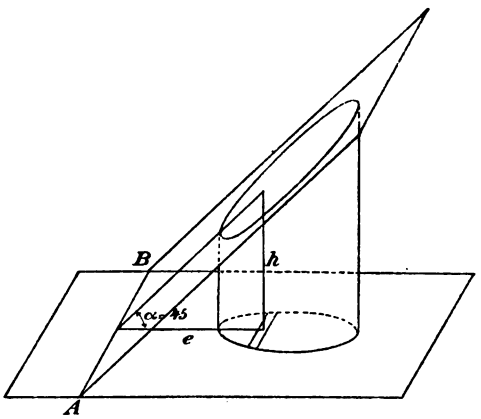
Wegen der Bezugnahme auf eine Achse bezeichnet man ein solches Moment als axiales Trägheitsmoment.

21) Veranschaulichung des Trägheitsmomentes durch abgeschrägte Körper.

Man denke sich durch AB eine unter 45^0 gegen die Zeichnungsebene geneigte Ebene gelegt, welche die über der Fläche F zu errichtende senkrechte Säule schräg abschneidet. In Figur 30 ist

dies für eine beliebig gestaltete Fläche dargestellt. Über jedem schmalen Parallelstreifen f steht dann eine Säule, deren Höhe h gleich der Entfernung e von der Achse AB ist. Ihr Inhalt ist durch fh und zugleich durch fe bestimmt, also gleich dem statischen Momente des Streifens in Bezug auf AB. Da dies von allen Streifen gilt, so folgt, dafs die Mafszahl für den Inhalt des abgeschrägten Körpers ebenso grofs ist, wie die für das statische Moment der Fläche in Bezug auf AB, also, abgekürzt ausgedrückt: Körperinhalt gleich Flächenmoment. Jede der kleinen Säulen hat in Bezug auf AB ebenfalls ein statisches Moment, welches gleich dem Produkte aus dem Inhalte fh und der Entfernung e ist, also gleich $fhe = fe^2$. Ebenso grofs ist aber auch das Trägheitsmoment des Streifens in Bezug auf AB. Dies gilt von allen Säulen und Streifen. Die Mafszahl für das Trägheitsmoment der Grundfläche stimmt also überein mit der Mafszahl für das statische Moment des abgeschrägten Körpers in Bezug auf AB, oder kurz ausgedrückt:

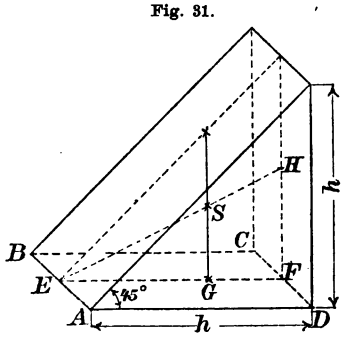
Fig. 30.



Statisches Moment des Körpers in Bezug auf AB gleich dem Trägheitsmoment der Grundfläche in Bezug auf AB.

Diese einfache Vorstellungsweise ermöglicht es, die Berechnung der Trägheitsmomente für einige Flächen durchzuführen.

Fig. 31.



22) **Aufgabe.** Ein Rechteck habe die Seiten b und h, sein Trägheitsmoment in Bezug auf eine der Seiten b soll berechnet werden.

Auflösung. $ABCD$ sei das Rechteck mit Seite $AB = b$ und $AD = h$. Über ihm ist das entsprechende Körperdiagramm gezeichnet, dessen Höhe h ist. Nach bekanntem Dreieckssatze liegt der Schwerpunkt S so, dafs $ES = \frac{2}{3} EH$, folglich auch $EG = \frac{2}{3} EF = \frac{2}{3} h$ ist.

Der Körperinhalt ist $J = (bh)\frac{h}{2} = \frac{bh^2}{2}$. Das statische Moment des Körpers in Bezug auf AB ist also $M = \left(\frac{2}{3}h\right) \cdot J = \frac{2}{3}h\frac{bh^2}{2} = \frac{bh^3}{3}$. Ebenso grofs ist das gesuchte Trägheitsmoment. Also

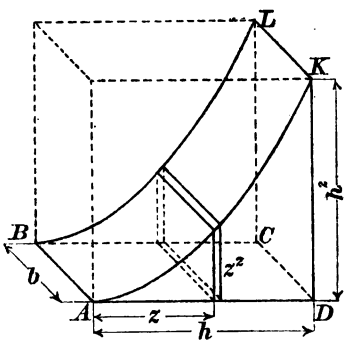
$$T = \frac{bh^3}{3}.$$

Man kann auch schreiben $T = bh \cdot \frac{h^2}{3} = F\frac{h^2}{3}$, wo F die Rechtecksfläche bedeutet.

23) Veranschaulichung des Trägheitsmomentes durch parabolisch begrenzte Körper.

Man denke sich dasselbe Rechteck, wie vorher, jedoch stehe über jedem Streifen eine Säule von der Höhe z^2. Ihr Inhalt ist fz^2, also ebenso grofs, wie das Trägheitsmoment des Streifens in Bezug auf AB. Der Inhalt dieses Körpers stimmt also überein mit dem Trägheitsmomente der Grundfläche, er mufs also nach 3) gleich $\frac{bh^3}{3}$ sein, d. h. gleich dem dritten Teile des über der Fläche stehenden Rechteckskörpers.

Fig. 32.



Man bezeichnet die Curven AK bezw. BL als Parabeln. Die gekrümmte Fläche ist die eines parabolischen Cylinders mit ADK oder BCL als Grundfläche. Man hat hier den Satz gefunden, dafs die Parabel den dritten Teil vom zugehörigen Rechteck abschneidet.

Denkt man sich in der Grundebene eine beliebige Fläche und errichtet man über ihr eine bis zur parabolischen Fläche reichende Säule, so ist der Inhalt der letzteren identisch mit dem Trägheitsmomente der Grundfläche in Bezug auf die Berührungslinie AB.

24) **Aufgabe.** Das Trägheitsmoment des Rechtecks in Bezug auf eine Mittellinie zu finden.

Auflösung. In Figur 33 sei $ABCD$ das Rechteck mit der als Achse angenommenen Mittellinie KL. Rechts befindet sich der parabolische Körper von der Höhe $\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{4}$. Da $f \cdot (-z)^2 = f \cdot z^2$ ist, so hat man links denselben Körper zu errichten. Vom Rechtecksköper, dessen Inhalt $\frac{bh^3}{4}$ ist, wird nach Obigem durch die para-

bolische Fläche $\frac{2}{3}$ weggeschnitten, es bleibt also stehen $\frac{1}{3}\frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}$. Das gesuchte Trägheitsmoment ist also $T = \frac{bh^3}{12}$.

Fig. 33.

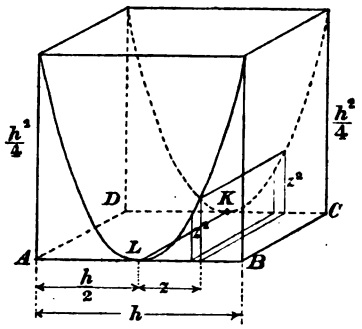
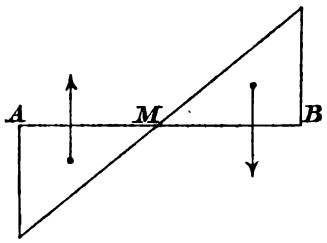


Fig. 34.



25) **Bemerkung.** Die frühere Veranschaulichungsmethode macht, wenn die angenommene Achse die Fläche schneidet, einige Vorsicht nötig. Aus $f \cdot (-z) = -f \cdot z$ folgt nämlich, dafs die Darstellung des statischen Momentes durch den abgeschrägten Körper auch auf negative Lote führt, so dafs ein Teil des Diagrammkörpers unter die Grundfläche zu liegen kommt. Dort ist dann die Schwerkraft als negativ aufzufassen, damit $f \cdot z^2$ und $f(-z) \cdot (-z)$ Momente geben, die zu addieren sind, wie es das Trägheitsmoment verlangt. Die parabolische Veranschaulichung ist daher im allgemeinen vorzuziehen.

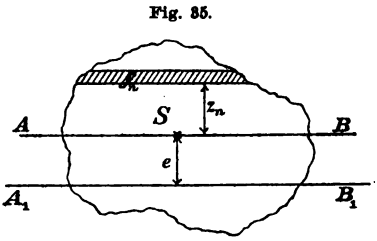
26) **Bemerkung.** Neben $M = \sum fz$ und $T = \sum fz^2$ könnte man noch andere Momente, wie $\sum fz^3$, $\sum fz^4$ u. s. w. betrachten. Dies soll vorläufig nicht geschehen. Jedoch sei darauf aufmerksam gemacht, dafs man, je nach dem Exponenten von z, von Momenten 1ter, 2ter, 3ter u. s. w. Ordnung sprechen kann.

27) Satz über die **Parallelverschiebung.** Ist das Trägheitsmoment einer Fläche F in Bezug auf eine Schwerpunktsachse gleich T, so ist es in Bezug auf eine parallele, um e von ihr entfernte Achse derselben Ebene $T_1 = T + e^2F$.

Beweis. Wird die Achse von AB nach A_1B_1 verschoben, so wird der Abstand z eines Parallelstreifens in $z + e$ verwandelt, und aus $f \cdot z^2$ wird $f(z+e)^2 = fz^2 + fe^2 + 2fze$. Demnach geht $T = \sum fz^2$ über in $T_1 = \sum f(z+e)^2 = \sum fz^2 + \sum fe^2 + \sum 2fze$ $= \sum fz^2 + e^2 \sum f + 2e \sum fz$. Der erste Posten ist das alte Träg-

heitsmoment T, der zweite ist identisch mit e^2F, der dritte verschwindet, denn $\sum fz$ ist das statische Moment der Fläche in Bezug auf die Schwerpunktsachse AB, also gleich $0 \cdot F = 0$. Man hat also in der That $T_1 = T + e^2F$.

Fig. 35.



Ob man um $+e$ oder $-e$ verschiebt, ist gleichgültig, stets tritt eine Zunahme um e^2F ein.

Das Trägheitsmoment einer Fläche in Bezug auf eine Schwerpunktsachse ist demnach stets kleiner, als in Bezug auf jede zu dieser parallele Achse. Je gröfser man die Verschiebung e macht, um so gröfser wird das Trägheitsmoment.

Man hat nur noch nötig, die Trägheitsmomente in Bezug auf Schwerpunktsachsen zu untersuchen, da sie sich für alle andern nach dem gefundenen Satze leicht ableiten lassen.

Auch an den beiden Diagrammkörpern läfst sich der Satz leicht beweisen. Aus ihm lassen sich Sätze über parabolisch begrenzte Körper ableiten.

28) **Beispiel.** Für das Rechteck war in Bezug auf die Mittellinie $T = \frac{bh^3}{12}$. Verschiebt man die Achse um $e = \frac{h}{2}$, so erhält man $T_1 = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 F = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4} \cdot bh = \frac{bh^3}{3}$. Dies stimmt mit dem früheren Resultate überein.

29) **Aufgabe.** Das Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten b und h in Bezug auf die zu b parallele Schwerpunktsachse zu finden.

Fig. 36.

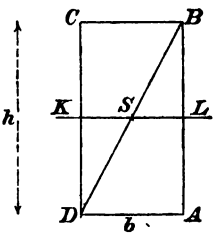
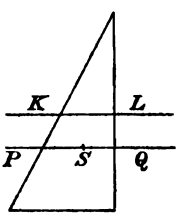


Fig. 37.



Auflösung. Für das Rechteck ist in Bezug auf die Achse KL das Trägheitsmoment $T = \frac{bh^3}{12}$. Für das Dreieck ABD ist es in Bezug auf KL halb so grofs, wie man am Diagonalschnitt des Diagrammkörpers (Fig. 33) erkennt, also gleich $\frac{bh^3}{24}$. Bei der Verschiebung nach dem Schwer-

punkte hin, d. h. um die Strecke $\frac{h}{6}$, vermindert sich der Werth um $e^2 F = \frac{h^2}{36} \cdot \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{72}$. In Bezug auf PQ erhält man demnach

$$T = \frac{bh^3}{24} - \frac{bh^3}{72} = \frac{bh^3}{36}.$$

30) **Bemerkung.** Ist T_1 das Trägheitsmoment einer Fläche in Bezug auf eine vom Schwerpunkte um e_1 entfernte Achse, und will man T_2 für eine um e_2 von ihm entfernte Achse bestimmen, so hat man zunächst für die Schwerpunktsachse $T = T_1 - e_1^2 F$, sodann $T_2 = T + e_2^2 F$ zu bilden, man erhält also

$$T_2 = T_1 - e_1^2 F + e_2^2 F = T_1 + \left(e_2^2 - e_1^2\right) F.$$

31) **Bemerkung.** Verschiebt man einen Parallelstreifen f parallel zur Achse, so bleibt die Entfernung z, folglich auch das Trägheitsmoment fz^2 ungeändert. Demnach haben Rechteck und Parallelogramm von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe in Bezug auf die in ihrer Richtung bleibende Mittellinie dasselbe Trägheitsmoment $\frac{bh^3}{12}$. Dasselbe gilt von der krummlinig begrenzten Fläche der Fig. 38.

Fig. 38.

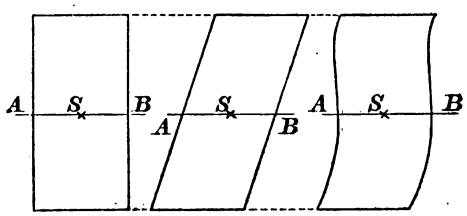
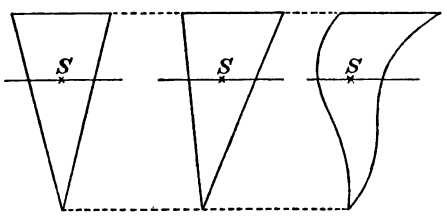


Fig. 39.



Dasselbe gilt von den in Fig. 39 dargestellten „Dreiecken“. Für die angedeutete Schwerpunktsachse haben sämtliche das Trägheitsmoment $T = \frac{bh^3}{36}$.

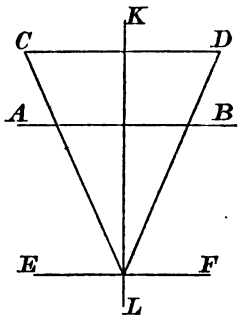
Überhaupt kann man, dem Satze des Cavalieri entsprechend, folgenden Satz aussprechen:

Haben zwei ebene Flächen in gleichen Höhen gleiche Querschnitte, so stimmen ihre Trägheitsmomente für gleich hoch liegende Achsen überein.

32) **Aufgabe.** Ein gleichschenkliges Dreieck habe die Basis b und die Höhe h. Wie groſs ist sein Trägheitsmoment für die Basis CD, wie groſs für die Parallele zur Basis durch die Spitze, also für EF, wie groſs für die Mittellinie KL?

Auflösung. Für CD erhält man

Fig. 40.



$$T_1 = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{12}.$$

Für EF wird

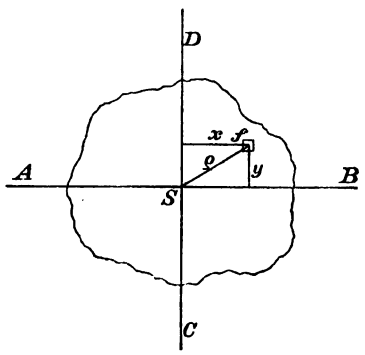
$$T_2 = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{2h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36} + \frac{2bh^3}{9} = \frac{bh^3}{4}.$$

Für KL giebt Dreieck KDL (ähnlich wie bei T_1) den Wert $\frac{h\left(\frac{b}{2}\right)^3}{12} = \frac{hb^3}{96}$. Dreieck KLC giebt ebenso viel, also wird für das ganze Dreieck $T_3 = \frac{hb^3}{48}$.

33) Begriff des polaren Trägheitsmomentes.

Man denke sich jedes Teilchen f einer Fläche mit dem Quadrate des Abstandes ϱ von einem festen Punkte multipliziert, dann ist das Produkt $f\varrho^2$ das polare Trägheitsmoment jedes Teilchens in Bezug auf den festen Punkt. Das polare Trägheitsmoment T_p der Gesamtfläche wird also definiert durch die Gleichung

Fig. 41.



$$T_p = \sum f\varrho^2.$$

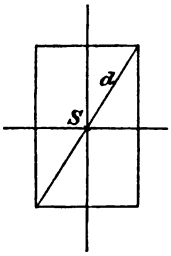
34) **Satz.** Das polare Trägheitsmoment in Bezug auf einen Punkt ist gleich der Summe zweier axialen in Bezug auf Achsen, die sich in dem Punkte rechtwinklig schneiden.

Beweis. In Fig. 41 ist $\varrho^2 = x^2 + y^2$, folglich gilt für jedes Teilchen f die Gleichung $f\varrho^2 = fx^2 + fy^2$, also für die Gesamtfläche $\sum f\varrho^2 = \sum fx^2 + \sum fy^2$ oder $T_p = T_1 + T_2$.

35) **Bemerkung.** Auch von dem polaren Trägheitsmomente gilt der Verschiebungssatz $T_p' = T_p + e^2F$. Ist nämlich T_p das polare Moment für den Schwerpunkt, so ist dies gleich dem axialen in Bezug auf die Verschiebungslinie e als Achse, vermehrt um das Moment in Bezug auf die dazu senkrechte Schwerpunktsachse. Bei der Verschiebung ändert sich nur das letztere um e^2F.

36) **Bemerkung.** Die Summe der axialen Trägheitsmomente einer Fläche in Bezug auf die Schenkel eines rechten Winkels bleibt ungeändert, wenn sich dieser in der Ebene um den Mittelpunkt dreht. Die Summe ist nämlich stets gleich dem polaren Trägheitsmomente in Bezug auf den Drehungspunkt.

Fig. 42.



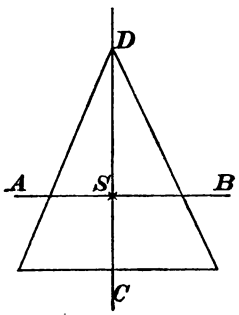
37) **Aufgabe.** Wie grofs ist das polare Trägheitsmoment des Rechtecks in Bezug auf den Schwerpunkt?

Auflösung. In Bezug auf die eine Mittellinie hat man $T_1 = \frac{bh^3}{12}$, in Bezug auf die andere $T_2 = \frac{hb^3}{12}$. Demnach ist

$$T_p = T_1 + T_2 = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2) = \frac{bh}{12}d^2 = \frac{Fd^2}{12},$$

wo d die Diagonale, F die Fläche bedeutet.

Fig. 43.



38) **Aufgabe.** Wie grofs ist das polare Trägheitsmoment eines gleichschenkligen Dreiecks mit Basis b und Höhe h für den Schwerpunkt und für die Spitze?

Auflösung. Für den Schwerpunkt ist nach 10) und 13)

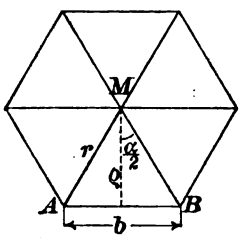
$$T_p = \frac{bh^3}{36} + \frac{hb^3}{48} = \frac{bh}{144}(4h^2 + 3b^2).$$

Addiert man dazu $\left(\frac{2}{3}h\right)^2 \frac{bh}{2}$ oder $\frac{2}{9}bh^3$, so erhält man für die Spitze

$$T_p' = \frac{bh}{144}(4h^2 + 3b^2) + \frac{32}{144}bh^3 = \frac{bh}{48}(12h^2 + b^2).$$

39) **Aufgabe.** Wie grofs ist das polare Trägheitsmoment des regelmäfsigen n-Ecks mit Umfang u in Bezug auf den Schwerpunkt?

Fig. 44.



Auflösung. Für jedes Dreieck ist in Bezug auf die Spitze M nach 19)

$$T_p = \frac{b\varrho}{48}(12\varrho^2 + b^2),$$

wo

$$\varrho = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)}{\tan\frac{a}{2}} = \frac{b}{2}\cot\frac{180^\circ}{n} \text{ ist.}$$

Führt man $u = nb$ ein, so ergiebt sich für die Gesamtfläche

$$T_p = \frac{n\frac{u}{n}\varrho}{48}\left(12\varrho^2 + \frac{u^2}{n^2}\right) = \frac{\varrho u}{48}\left(\frac{u^2}{n^2} + 12\varrho^2\right).$$

40) Folgerungen für den Kreis. Nimmt man im letzten Resultate n unendlich grofs an, so wird $\frac{u^2}{n^2} = 0$, und das Polygon wird zum Kreise mit Umfang

$$u = 2\varrho\pi.$$

Das polare Trägheitsmoment des Kreises ist also in Bezug auf den Mittelpunkt

$$T_p = \frac{\varrho\,(2\varrho\pi)}{48}\,12\varrho^2 = \frac{\varrho^4\pi}{2} = \frac{\pi d^4}{32},$$

wo d den Durchmesser bedeutet.

Für den concentrischen Kreisring mit r und r_1 bezw. d und d_1 erhält man durch Subtraktion

$$T_p = \frac{\pi d^4}{32} - \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{\pi}{32}\left(d^4 - d_1^4\right) = \frac{\pi}{2}\left(r^4 - r_1^4\right).$$

Das axiale Trägheitsmoment des Kreises ist halb so grofs, als das polare, denn $T_p = T_1 + T_2$, oder, da die beiden letzten übereinstimmen, $T_p = 2T_1$. Demnach ist für den Kreis mit Radius r und Durchmesser d

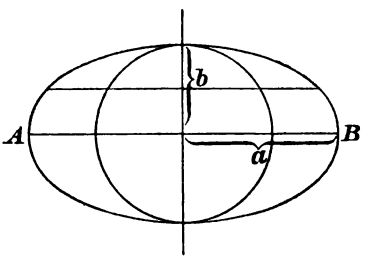
$$T = \frac{r^4\pi}{4} = \frac{d^4\pi}{64},$$

für den concentrischen Kreisring

$$T = \frac{\pi}{4}\left(r^4 - r_1^4\right) = \frac{\pi}{64}\left(d^4 - d_1^4\right).$$

41) **Aufgabe.** Die Trägheitsmomente einer Ellipse mit den Halbachsen a und b zu berechnen.

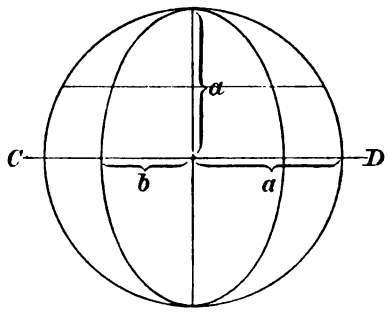
Fig. 45.



Auflösung. Für den Kreis mit Radius b ist in Bezug auf AB $T = \frac{\pi b^4}{4}$. Für die Ellipse ist jede Querlinie $\frac{a}{b}$ mal so grofs, wie die entsprechende des Kreises. Folglich ist für die Ellipse in Bezug auf AB

$$T = \frac{\pi b^4}{4}\frac{a}{b} = \frac{\pi a b^3}{4}.$$

Fig. 46.



Für den Kreis mit Radius a ist in Bezug auf CD das Trägheitsmoment $T = \frac{\pi a^4}{4}$. Für die Ellipse ist jede Querlinie das $\frac{b}{a}$-fache von der entsprechenden des Kreises. Für die Ellipse ist also in Bezug auf CD

$$T = \frac{\pi a^4}{4}\frac{b}{a} = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

Das Polarmoment der Ellipse ist

$$T_p = \frac{\pi a b^3}{4} + \frac{\pi a^3 b}{4} = \frac{ab\pi}{4}(a^2 + b^2) = \frac{F}{4}(a^2 + b^2).$$

42) Veranschaulichung des polaren Trägheitsmomentes. Fig. 47 stellt eine Kreisfläche dar, über der ein Cylinder von der Höhe r^2 errichtet ist. Über jedem Flächenteilchen f in der Entfernung ϱ vom Mittelpunkte denke man sich eine Säule von der Höhe ϱ^2 errichtet, so dafs der Säuleninhalt $f\varrho^2$ ist. Dann liegen die Endpunkte der Lote in einer Fläche, die man als Drehungsparaboloid bezeichnet. Der Inhalt des Aufsenkörpers ist gleich $\sum f\varrho^2$, stimmt also mit dem Trägheitsmomente überein, d. h. er ist gleich $\frac{r^4\pi}{2}$, d. h. gleich der Hälfte des Cylinders.

Fig. 47.

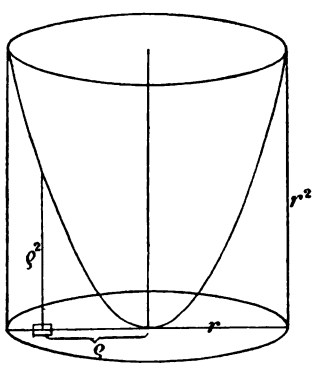
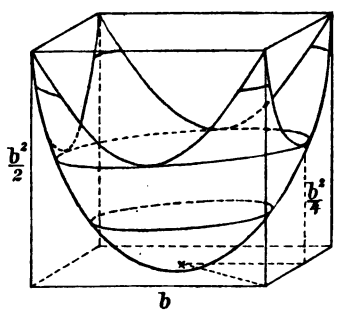


Fig. 48.



In ähnlicher Weise ist in Fig. 48 das polare Trägheitsmoment eines Quadrates veranschaulicht. Aus dem Aufsenraume des Drehungsparaboloids ist der entsprechende quadratische Cylinder ausgeschnitten. Der Aufsenkörper ist vom Inhalte

$$T_p = \frac{bb^3}{12} + \frac{bb^3}{12} = \frac{b^4}{6},$$

also, da das Prisma den Inhalt $\frac{b^4}{2}$ hat, gleich dem dritten Teile des Prismas*).

In entsprechender Weise läfst sich das polare Trägheitsmoment jeder Fläche durch einen Diagrammkörper veranschaulichen. Kennt man die polaren Trägheitsmomente, so kann man Sätze über den Inhalt von Körpern aussprechen, die in solcher Weise parabolisch begrenzt sind. Ist die Parabel von der Form $y = \varrho^2$, so ist der Inhalt der parabolisch begrenzten Säule gleich dem polaren Trägheitsmomente T_p in Bezug auf den Berührungspunkt der parabolischen Fläche. Ist sie von der Form $y = a\varrho^2$, so der Inhalt gleich aT_p.

43) Zusammenhang des polaren Trägheitsmomentes mit den Trägheitsmomenten der Dynamik. In der Dynamik handelt es sich nicht um Flächenteilchen, sondern um Massenteilchen. An Stelle der fz^2 und $f\varrho^2$ treten Gröfsen mz^2 bezw. $m\varrho^2$, an Stelle der Gesamtfläche tritt eine Gesamtmasse.

So war z. B. für den Kreis das polare Trägheitsmoment $T_p = \frac{r^4\pi}{2} = (r^2\pi)\frac{r^2}{2} = F\frac{r^2}{2}$. Setzt man an Stelle von F die Masse m, mit der die Fläche homogen belegt zu denken ist, so ergiebt sich $T = m\frac{r^2}{2}$ als das dynamische Trägheitsmoment einer Kreisscheibe von der Masse m in Bezug auf das Lot im Mittelpunkte.

Für das Rechteck mit der Diagonale d war das polare Trägheitsmoment $T_p = bh\frac{d^2}{12} = F\frac{d^2}{12}$. Demnach ist $m\frac{d^2}{12}$ das dynamische

Fig. 49.

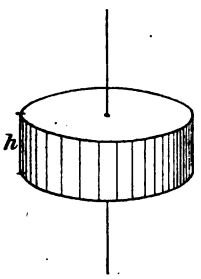


Fig. 50.

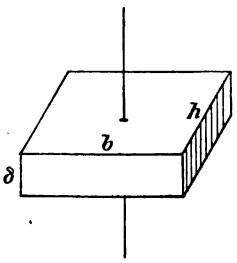
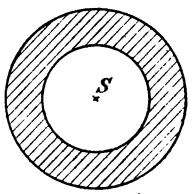


Fig. 51.



Trägheitsmoment einer Rechteckscheibe in Bezug auf das Lot im Mittelpunkte der Rechtecksfläche.

*) Man denke sich ein Gefäfs von quadratischem Querschnitt auf der Centrifugalmaschine in Drehung versetzt, so dafs die Wasseroberfläche sich parabolisch einstellt. Ist das Gefäfs zum 3ten Teile gefüllt, so nimmt der Trichter in dem Momente, wo er den Boden berührt, die oben gezeichnete Gestalt an.

Für einen concentrischen Kreisring war

$$T_p = \left(r^4 - r_1^4\right)\frac{\pi}{2} = \left(r^2 + r_1^2\right)\left(r^2 - r_1^2\right)\frac{\pi}{2} = \frac{r^2 + r_1^2}{2} \cdot F.$$

Demnach ist für den entsprechenden scheibenförmigen Ringkörper das dynamische Trägheitsmoment gleich $m\,\frac{r^2 + r_1^2}{2}$.

Das mathematische Trägheitsmoment T verhält sich also zum dynamischen T' wie die Fläche F zur Masse m. Ganz allgemein folgt aus

$$T : T' = F : m,$$

dafs

$$T' = \frac{Tm}{F}.$$

44) Einige Anwendungen. In der Mechanik wird gezeigt, dafs das Trägheitsmoment bei beschleunigten Drehungsbewegungen dieselbe Rolle spielt, wie die träge Masse m bei beschleunigten geradlinigen Bewegungen. Bei den letzteren ist die Beschleunigung $g = \frac{m}{p}$, wo p die Triebkraft, m die zu bewegende Masse ist. Ebenso ist bei Drehungen die am Radius 1 zu messende Winkelbeschleunigung

$$\gamma = \frac{pr}{T'} = \frac{M}{T'},$$

wo $pr = M$ das statische Moment der Triebkraft, T' das dynamische Trägheitsmoment der zu drehenden Masse ist. Die Arbeitswucht (Energie) der geradlinig bewegten Masse ist dort $m\,\frac{v^2}{2}$, wo v die Geschwindigkeit bedeutet. Bei drehenden Körpern dagegen ist sie $E = T\,\frac{\vartheta^2}{2}$, wo ϑ die am Radius 1 gemessene Winkelgeschwindigkeit bedeutet.

Die Formel für die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels ist $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Um die Formel für das physische Pendel zu finden, hat man für l den Ausdruck $\frac{T}{M}$ einzusetzen, wo T das Trägheitsmoment, M das statische Moment des Pendels in Bezug auf die Schwerpunktsachse bedeutet. Man bezeichnet dieses l als die reduzierte Pendellänge.

Erhält ein freischwebender Körper einen excentrischen Stofs, so ist im Anfange die Bewegung identisch mit der Drehung um eine Achse, die von der Richtungslinie des Stofses die Entfernung $\frac{T}{M}$ hat. Daraus berechnet man das Mafs der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunktes und der drehenden nach dem Stofse.

45) Zusammenhang des axialen Trägheitsmomentes mit Problemen der Mechanik. Auch das axiale Trägheitsmoment einer Fläche kann mit dem dynamischen in die besprochenen Beziehungen gesetzt werden, nur ist dabei die Scheibe unendlich dünn zu denken, d. h. die Fläche selbst ist mit hypothetischer Massenbelegung zu versehen. Auch dann gelten die Formeln $\gamma = \frac{M}{T}$, $E = \frac{T\vartheta^2}{2}$, $l = \frac{T}{M}$. Die Drehung geschieht dabei stets um eine in der Ebene liegende Achse.

Von Bedeutung ist noch eine hydrostatische Anwendung. Die Resultante des Wasserdrucks gegen eine senkrechte Seitenwand liegt in der Tiefe $h = \frac{T}{M}$, wo T das Trägheitsmoment der Fläche, M ihr statisches Moment in Bezug auf die Schnittlinie mit der Wasseroberfläche ist. Ähnliches gilt von schrägliegenden Druckflächen.

Die wichtigste Anwendung des axialen Trägheitsmomentes ebener Flächen geschieht aber in der Festigkeitslehre. So ist z. B. die Tragfähigkeit eines Freiträgers von Länge l und von rechteckigem Querschnitt mit Grundlinie b und Höhe h

$$P = \frac{ST}{l\frac{h}{2}} = \frac{S\frac{bh^3}{12}}{l\frac{h}{2}} = \frac{Sbh^2}{6l},$$

wo S die zulässige Spannung für die Flächeneinheit bedeutet.

Die allgemeine Formel lautet

$$P = \frac{ST}{la},$$

wo a den Abstand der äufsersten Randfaser von der durch den Schwerpunkt des Querschnittes gelegten horizontalen Biegungsachse bedeutet. Den Ausdruck $\frac{T}{a}$ bezeichnet man als Widerstandsmoment W (oder auch als Querschnittsmodul Z). Es ist z. B. für das Rechteck $W = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$, für den Kreis ist $W = \frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{32}$, für den Kreisring $W = \frac{\frac{\pi}{64}(d^4 - d_1^4)}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi(d^4 - d_1^4)}{32d}$. Für die Strebfestigkeit ist W von entsprechender Bedeutung.

46) Zusammenhang des polaren Trägheitsmomentes mit der Festigkeitslehre.

Ist PR das eine Triebwelle verdrehende Moment, so ist die

Gleichgewichtsgleichung der Festigkeitslehre $PR = SW_p$, wo S die zulässige Schubspannung für die Flächeneinheit, W_p den Ausdruck $\frac{T_p}{a}$, das polare Widerstandsmoment, bedeutet. Für den Kreis z. B. ist

$$W_p = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16},$$

für das Quadrat

$$W_p = \frac{\frac{b^4}{6}}{b\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{b^3}{6\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{b^3}{3\sqrt{2}}.$$

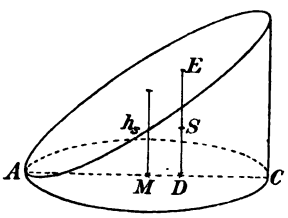
Dafs auch die Verdrehung der Welle von W_p abhängig ist, soll unten angedeutet werden.

Bemerkung. Diese Bedeutung für die Festigkeitslehre allein würde hinreichen, das Studium der betrachteten Momente als besonders wichtig erscheinen zu lassen. Sie sind aber auch unentbehrlich für gewisse mathematische Berechnungen, die wiederum für die Mechanik von Wichtigkeit sind. Auch dafür sollen einige Beispiele gegeben werden. Es wird sich besonders um abgeschrägte Säulen und um Drehungskörper handeln.

47) **Aufgabe.** Den Schwerpunkt eines Cylinderhufs zu bestimmen.

Auflösung. Ist die Schrägfläche unter 45° geneigt, so ist das statische Moment des Körpers in Bezug auf die durch A gehende Schnittlinie der beiden Ebenen gleich dem Trägheitsmomente der Grundfläche in Bezug auf diese Achse; d. h.

Fig. 52.



$$T = \frac{r^4\pi}{4} + (r^2)r^2\pi = \frac{5}{4}r^4\pi.$$

Der Inhalt des Körpers aber ist gleich dem statischen Momente der Grundfläche in Bezug auf jene Achse, d. h.

$$M = (r^2\pi)\, r = r^3\pi = J.$$

Ist nun D die Projektion des Körperschwerpunktes S, so ist das statische Moment des Körpers in Bezug auf die Schnittlinie zugleich $AD \cdot J$ oder $AD \cdot M$, also ist, wenn $AD = e$ gesetzt wird, $e \cdot M = T$, folglich

$$e = \frac{T}{M} = \frac{\frac{5}{4}r^4\pi}{r^3\pi} = \frac{5}{4}r.$$

In dieser Entfernung ist ein Lot DE zu errichten, in dessen Halbierungspunkte der Körperschwerpunkt liegt.

Ist die Schrägebene nicht unter 45°, sondern unter einem beliebigen Winkel α geneigt, so ist der Körperinhalt $J = M \cdot \tan\alpha$, sein statisches Moment also $T \cdot \tan\alpha$. Die Entfernung AD wird

$$e = \frac{T \tan\alpha}{M \tan\alpha} = \frac{T}{M},$$

wie vorher.

48) **Folgerung.** Die Formel $e = \frac{T}{M}$ für die Entfernung der Schwerpunktsprojektion gilt in derselben Weise für jeden abgeschrägten Körper. Für regelmäfsige und symmetrische Grundflächen ist so der Schwerpunkt des abgeschrägten Körpers leicht zu bestimmen. Bei beliebig gestalteten Flächen mufs für die Lage von D noch eine zweite Koordinate bestimmt werden, was mit Hülfe der später zu besprechenden Centrifugalmomente geschieht.

Aber nicht nur für abgeschrägte Körper gilt diese Bestimmung, sondern, wie gezeigt werden soll, mit entsprechender Änderung auch für Sektoren von Drehungskörpern.

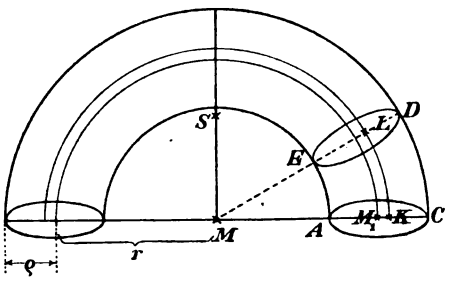
49) **Aufgabe.** Wo liegt der Schwerpunkt des in Figur 53 dargestellten halben Drehungskörpers mit kreisförmigem Querschnitt?

Auflösung. Jeder kleine Sektor $ACDE$ läfst sich als abgeschrägter Cylinder betrachten. Sind r und ϱ die Radien, so hat die Schwerlinie KL eine Entfernung e von M, die sich aus

$$e = \frac{T}{M} = \frac{\frac{\varrho^4\pi}{4} + \varrho^2\pi \cdot r^2}{\varrho^2\pi \cdot r} = \frac{\varrho^2 + 4r^2}{4r}$$

berechnet. Auf dem mit diesem Radius e um M geschlagenen Kreise liegen die Schwerpunkte der sämtlichen kleinen Sektoren. Der Schwerpunkt des Körpers fällt also mit dem dieses Halbkreisbogens zusammen. Demnach ist (vgl. Nr. 9)

Fig. 53.



$$MS = \frac{2e}{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{T}{M} = \frac{2}{\pi}\frac{\varrho^2 + 4r^2}{4r} = \frac{\varrho^2 + 4r^2}{2r\pi}.$$

Wichtiger ist das allgemeine Resultat, dafs für halbe Rotationskörper von beliebigem Hauptschnitt

$$MS = \frac{2}{\pi}\frac{T}{M}$$

die Entfernung des Schwerpunktes vom Centrum ist.

In diesem Punkte ist die Masse des halben Rotationskörpers vereinigt zu denken, wenn man berechnen will, durch welche Centrifugalkraft die eine Hälfte des ganzen Körpers von der andern abgerissen werden soll, sobald er schnell um seine Hauptachse dreht.

Ist ϑ die am Einheitskreise gemessene Winkelgeschwindigkeit, so ist diese Centrifugalkraft

$$K = m \cdot \overline{MS} \cdot \vartheta^2 = m\frac{2}{\pi}\frac{T}{M}\vartheta^2.$$

Hier ist $m = \frac{p}{g} = \frac{J \cdot p'}{g}$, wenn J der Inhalt, p' das specifische Gewicht des halben Körpers ist. Nun ist aber nach Guldin $J = \frac{2r\pi \cdot F}{2}$ und das Moment $M = F \cdot r$, also ist

$$K = \frac{r\pi F p'}{g}\frac{2}{\pi}\frac{T}{Fr}\vartheta^2 = 2\frac{p'}{g}T\vartheta^2.$$

Zur Kenntnis der Beanspruchung eines beliebig gestalteten Schwungringes durch die Centrifugalkraft reicht also die Kenntnis des Trägheitsmomentes der erzeugenden Fläche, der Winkelgeschwindigkeit und des spezifischen Gewichtes p' aus.

Der vorher behandelte Körper mit kreisförmigem Querschnitt wird also beansprucht durch

$$K = \frac{2p'}{g}\left[\frac{\varrho^4\pi}{4} + \varrho^2\pi r^2\right]\vartheta^2 = \frac{\varrho^2\pi p'}{2g}(\varrho^2 + 4r^2)\,\vartheta^2.$$

Für die Kugel bestätigt sich das bekannte Resultat $\frac{p}{g}\frac{r^4\pi\vartheta^2}{4}$. Aufgaben solcher Art sind von Wichtigkeit nicht nur für die Theorie der Schwungräder, sondern auch für die der sogenannten Centrifugen, bei denen nicht nur die Centrifugalkraft des halben Gefäfses, sondern auch der gegen die Wände gepreſsten Flüssigkeit zu berechnen ist. Die Gestalt der letzteren kann bei grofsen Geschwindigkeiten als Rotationskörper eines Kreissegmentes betrachtet werden, wenn das Gefäfs kugelförmig begrenzt ist.

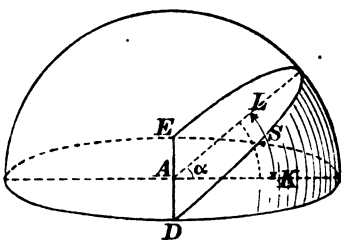
50) **Aufgabe.** Den Schwerpunkt eines Meridiankeils der Kugel zu bestimmen.

Auflösung. In Bezug auf DE ist das statische Moment der

Halbkreisfläche $M = \frac{r^2\pi}{2} \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{2}{3} r^3$, das Trägheitsmoment ist $T = \frac{r^4\pi}{8}$, folglich

$$e = \frac{T}{M} = \frac{\frac{r^4\pi}{8}}{\frac{2}{3} r^3} = \frac{3\pi}{16} r.$$

Fig. 54.



Mit diesem Radius e ist ein Kreisbogen KL zu schlagen, dessen Schwerpunkt mit dem des Körpers übereinstimmt. Die Schwerpunktsentfernung AS wird $\frac{e \cdot s}{\widehat{b}}$, wo s die Sehne KL, $\widehat{b}$ den Bogen KL bedeutet. Ist nun der Keilwinkel gleich α^0, so ist $\widehat{b} = e\pi \frac{\alpha^0}{180^0}$, dagegen die Sehne $s = 2e \sin \frac{\alpha}{2}$, also

$$AS = \frac{e \cdot 2e \sin \frac{\alpha}{2}}{e\pi \frac{\alpha^0}{180^0}} = \frac{360\, e \sin \frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha} = \frac{360 \cdot 3\pi r \sin \frac{\alpha}{2}}{16\pi\alpha}$$

oder

$$AS = \frac{135}{2} \frac{r \sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha}.$$

Ist z. B. $\alpha = 180^0$, so wird $AS = \frac{135}{2} \cdot \frac{r}{180^0} = \frac{3}{8} r$, was mit der bekannten Entfernung des Halbkugelschwerpunktes übereinstimmt.

An diesen Beispielen wird man erkennen, von welcher Wichtigkeit es ist, von beliebig gestalteten ebenen Flächen die statischen Momente, die axialen und polaren Trägheitsmomente, die Widerstandsmomente und die Schwerpunktslagen zu bestimmen. In Nachstehendem sind zunächst einige der wichtigeren Querschnittsformen der Technik in diesem Sinne behandelt.

Auf jeden dieser Querschnitte läfst sich ein parabolisch begrenzter Diagrammkörper nach Art der Figuren 32, 33, 47 und 48 aufsetzen, dessen Inhalt gleich dem axialen oder polaren Trägheitsmomente ist. Seine korrekte Konstruktion bietet eine vortreffliche Übung des räumlichen Vorstellungsvermögens. In der Abhandlung des Herrn Bantlin, die in den Vorbemerkungen genannt ist, findet man eine lehrreiche Sammlung solcher Zeichnungen.

Abschnitt III.

Trägheitsmomente für die wichtigeren Querschnittsformen des Bau- und Maschinenwesens.*)

A. Die Momente.

51) Rechtecksquerschnitt.

$$T_1 = \frac{bh^3}{12}, \quad T_2 = \frac{hb^3}{12}, \quad T_p = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$$

oder

$$T_p = \frac{F}{12} d^2,$$

wo d die Diagonale, F die Fläche bedeutet.

Widerstandsmoment:

$$W_1 = \frac{T_1}{\left(\frac{h}{2}\right)} = \frac{bh^2}{6}, \quad W_2 = \frac{T_2}{\left(\frac{b}{2}\right)} = \frac{hb^2}{6}.$$

Sonderfall des Quadrates:

$$T_1 = T_2 = \frac{b^4}{12}, \quad T_p = \frac{b^4}{6}, \quad W_1 = W_2 = \frac{b^3}{6}.$$

Fig. 55.

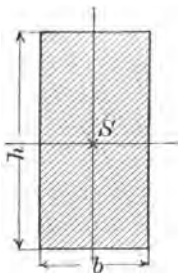


Fig. 56.

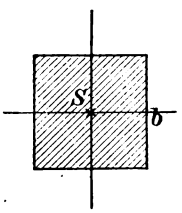
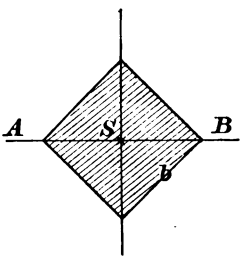


Fig. 57.



Quadrat in diagonaler Stellung. Figur 57.

Jedes der Dreiecke mit Basis $AB = b\sqrt{2}$ hat die Höhe $b\sqrt{\frac{1}{2}}$, nach Nr. 32 ist also für jedes in Bezug auf die Basis

*) In dieser Zusammenstellung werden einige schon behandelte Grundformen noch einmal dargestellt, damit nicht scheinbare Lücken entstehen.

$$T = \frac{b\sqrt{2}\left(b\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3}{12} = \frac{b^4}{24},$$

für das Quadrat also

$$T_1 = T_2 = \frac{b^4}{12}, \quad W_1 = W_2 = \frac{\frac{b^4}{12}}{b\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{b^3\sqrt{2}}{12}.$$

52) Rechteckige Gurtungen, die durch Fachwerk verbunden und als ein einziger Körper zu betrachten sind.

$$T_1 = \frac{b}{12}\left(h^3 - h_1^3\right), \quad W_1 = \frac{b\left(h^3 - h_1^3\right)}{12\frac{h}{2}} = \frac{b\left(h^3 - h_1^3\right)}{6h}.$$

Die andern Gröfsen kommen hier nicht in Betracht.

Fig. 58.

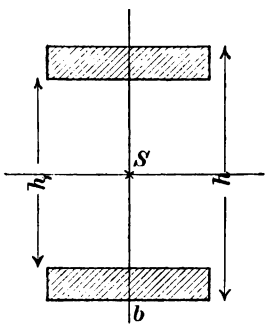
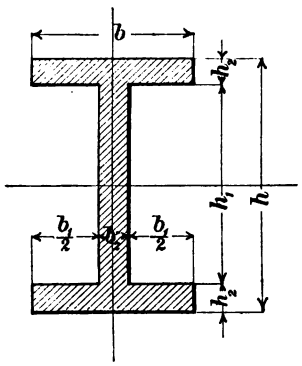


Fig. 59.



53) I-Träger (Doppel-T-Querschnitt). Figur 59.

$$T_1 = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12}, \quad T_2 = \frac{h_1b_2^3 + 2h_2b^3}{12}.$$

T_2 kommt in Frage, wenn der Träger als Strebe benutzt wird.

$$W_1 = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{6h}, \quad W_2 = \frac{h_1b_2^3 + 2h_2b^3}{6b}.$$

54) Gurtungen mit T-Querschnitt. Figur 60.

$$T = \frac{bh^3 - b_1h_1^3 - b_2h_2^3}{12},$$

$$W = \frac{bh^3 - b_1h_1^3 - b_2h_2^3}{6h}.$$

Die andern Gröfsen kommen hier nicht in Betracht.

55) +-Eisen (Kreuz-Querschnitt). Figur 61.

$$T_1 = T_2 = \frac{bh^3 + b_1 b^3}{12} = \frac{b(h^3 + b_1 b^2)}{12}, \quad T_p = \frac{b(h^3 + b_1 b^2)}{6}.$$

$$W_1 = W_2 = \frac{b(h^3 + b_1 b^2)}{6h}.$$

Fig. 60.

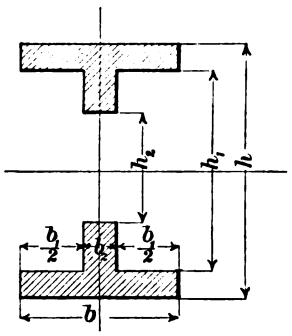
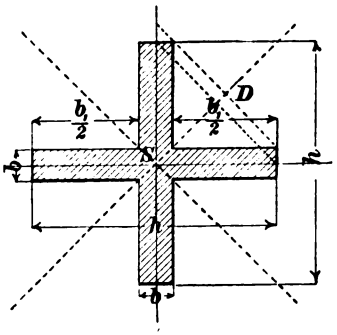


Fig. 61.

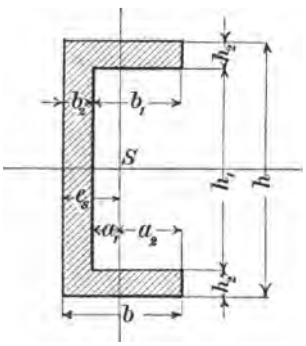


Derselbe Wert für T_1 und T_2 ergiebt sich für die Diagonalstellung, nur sind dann die Widerstandsmomente andere, nämlich

$$W_3 = W_4 = \frac{b(h^3 + h_1 b^2)}{12\,SD} = \frac{b(h^3 + h_1 b^2)}{12\left(\frac{h}{2} + \frac{b}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{b(h^3 + h_1 b^2)}{3(h + b)\sqrt{2}}.$$

56) ⊏-Eisen (U-förmiger Querschnitt). Figur 62.

Fig. 62.



Nach Nr. 3) ist

$$e_s = \frac{2h_2 b^2 + h_1 b_2^2}{2(2h_2 b + h_1 b_2)}.$$

Die beiden Momente werden

$$T_1 = \frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{12},$$

$$T_2 = \frac{1}{3}\left[he_s^3 - h_1 a_1^3 - 2h_2 a_2^3\right].$$

Die leicht zu bildenden Widerstandsmomente sollen von jetzt ab nicht mehr angegeben werden.

57) T-Träger (einfacher T-Querschnitt). Figur 63.

Nach Nr. 2) ist

$$h_s = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2h_1 + h_2)}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)}.$$

Die Momente werden

$$T_1 = \tfrac{1}{3}\left[b_1 h_s^3 + b_2 h_2^3 - b_3 h_3^3\right], \quad T_2 = \frac{h_1 b_1^3 + h_4 b_2^3}{12}.$$

Fig. 63.

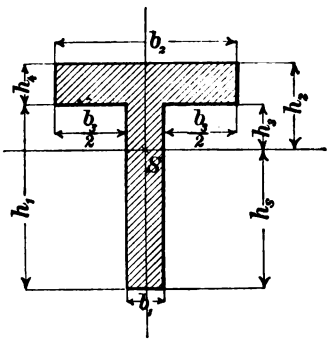
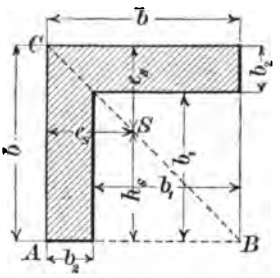


Fig. 64.



58) Γ-Eisen (gleichschenkliges Winkeleisen). Fig. 64.

Es handelt sich um die Differenz zweier Quadrate, so dafs nach Nr. 3)

$$h_s = \frac{b^3 - b_1^3}{2\left(b^2 - b_1^2\right)}, \quad e_s = b - h_s.$$

In Bezug auf AB wird $T = \dfrac{b^4 - b_1^4}{3}$, also in Bezug auf beide Schwerpunktsachsen

$$T_1 = T_2 = \frac{b^4 - b_1^4}{3} - h_s^2\left(b^2 - b_1^2\right).$$

59) Diagonalstellung des Γ-Eisens. Figur 65.

Vom Quadrat $AEBD$ sind drei Quadrate abzuziehen, wenn man das doppelt gezeichnete Winkeleisen erhalten will. In Bezug auf AB ist also

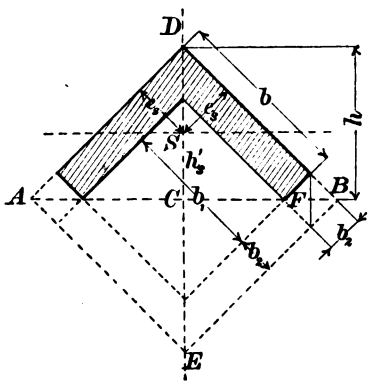
$$T = \frac{\left(b + b_2\right)^4}{12} - \frac{b_1^4}{12} - \frac{2\,b_2^4}{12}.$$

Für das einzelne Winkeleisen bleibt die Hälfte oder

$$T = \tfrac{1}{24}\left[\left(b + b_2\right)^4 - b_1^4 - 2\,b_2^4\right].$$

Nun ist aber $h = \left(b + b_2\right)\sqrt{\frac{1}{2}}$ und

Fig. 65.



$h_s' = h - e_s\sqrt{2}$. Demnach wird für die horizontale Schwerpunktsachse

$$T_1 = \tfrac{1}{24}\left[(b + b_2)^4 - b_1^4 - 2\,b_2^4\right] - h_s'^2\left(b^2 - b_1^2\right).$$

In Bezug auf Achse DE giebt das doppelte Γ-Eisen, da

$$CF = (b_1 + b_2)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

ist,

$$T_2 = \frac{(b + b_2)^4 - b_1^4}{12} - 2\left[\frac{b_2^4}{12} + \tfrac{1}{2}\left(b_1 + b_2\right)^2 b_z^2\right], \quad T_p = T_1 + T_2.$$

60) T-Eisen. Figur 66. Nach Nr. 3) wird

$$h_s = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2\left(2\,h_1 + b_2\right) + b_3 h_3\left(2\,h_1 + 2\,h_2 + h_3\right)}{2\left(b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3\right)},$$

$$T_1 = \tfrac{1}{3}\left[b_1 h_s^3 + b_3 a_3^3 - b_4 a_4^3 - b_5 a_5^3\right],$$

$$T_2 = \tfrac{1}{12}\left[h_1 b_1^3 + h_2 b_2^3 + h_3 b_3^3\right].$$

Fig. 66.

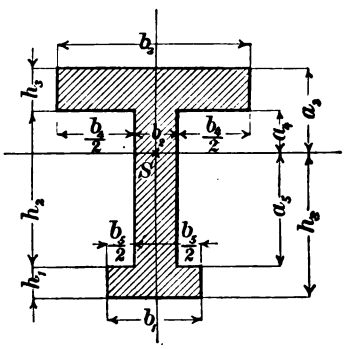
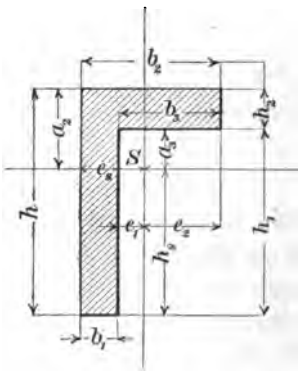


Fig. 67.



61) Γ-Eisen, ungleichschenklig. Figur 67. Nach Nr. 3) ist

$$h_s = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2\left(2 h_1 + h_2\right)}{2\left(b_1 h_1 + b_2 h_2\right)}, \quad e_s = \frac{b_1^2 h_1 + b_2^2 h_2}{2\left(b_1 h_1 + b_2 h_2\right)},$$

$$T_1 = \tfrac{1}{3}\left[b_1 h_s^3 + b_2 a_2^3 - b_3 a_3^3\right],$$

$$T_2 = \tfrac{1}{3}\left[h e_s^3 - h_1 e_1^3 + h_2 e_2^3\right].$$

62) Dreieck, gleichschenkliges.

$$T_1 = \frac{bh^3}{36}, \quad T_2 = \frac{hb^3}{48}, \quad T_p = \frac{bh}{144}(4h^2 + 3b^2).$$

In Bezug auf die Spitze ist infolge der Verschiebung um $\frac{2}{3}h$

$$T_p = \frac{bh}{48}(12h^2 + b^2).$$

Fig. 68.

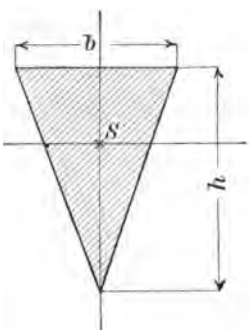
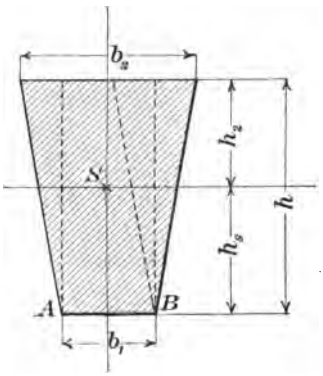


Fig. 69.



63) Trapez. (Annäherungsform für den Hakenquerschnitt.) Nach Nr. 4) ist

$$h_s = \frac{h(b_1 + 2b_2)}{3(b_1 + b_2)}.$$

In Bezug auf AB hat man durch Parallelogramm und Dreieck

$$\frac{b_1 h^3}{3} + \frac{(b_2 - b_1)h^3}{4} = \frac{h^3}{12}(b_1 + 3b_2).$$

Abzuziehen ist $h_s^2 F$, so dafs man erhält

$$T_1 = \frac{h^3}{12}(b_1 + 3b_2) - h_s^2 \frac{b_1 + b_2}{2} h = \frac{h^3}{36} \frac{b_1^2 + 4b_1 b_2 + b_2^2}{b_1 + b_2}.$$

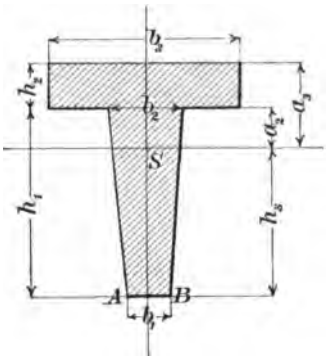
Das andere Moment wird

$$T_2 = \frac{hb_1^3}{12} + 2\left[\frac{h\left(\frac{b_2 - b_1}{2}\right)^3}{36} + \left(\frac{b_1}{2} + \frac{b_2 - b_1}{6}\right)^2 \frac{b_2 - b_1}{2} \cdot \frac{h}{2}\right]$$

$$= \frac{hb_1^3}{12} + \frac{h(b_2 - b_1)^3}{144} + \frac{2(2b_1 + b_2)^2(b_2 - b_1)h}{144}$$

$$= \frac{hb_1^3}{12} + \frac{h(b_2 - b_1)}{48}(3b_1^2 + b_2^2 + 2b_1 b_2) = \frac{h}{48}\left[b_1^3 + b_1^2 b_2 + b_1 b_2^2 + b_2^3\right].$$

Fig. 70.



64) Trapezförmiger T-Träger. Nach Nr. 4) ist

$$h_s = \frac{h_1^2(b_1 + 2b_2) + (2h_1 + h_2)\,3b_3h_2}{3\left[(b_1 + b_2)h_1 + 2b_3h_2\right]}.$$

In Bezug auf AB giebt das Trapez wie vorher $\frac{h^3}{12}(b_1 + 3b_2)$, also in Bezug auf die Schwerpunktsachse

$$\frac{h_1^3}{12}(b_1 + 3b_2) - h_s^2\frac{b_1 + b_2}{2}.$$

Das Rechteck giebt $\frac{b_3}{3}\left(a_3^3 - a_2^3\right)$, also wird

$$T_1 = \frac{h_1^3}{12}(b_1 + 3b_2) - h_s^2\frac{b_1 + b_2}{2} + \frac{b_3}{3}\left(a_3^3 - a_2^3\right).$$

Das andere Moment wird

$$T_2 = \frac{h_2 b_3^3}{12} + \frac{h_1}{48}\left[b_1^3 + b_1^2b_2 + b_1b_2^2 + b_2^3\right].$$

65) Regelmäfsiges n-Eck.

Aus dem polaren Trägheitsmomente des gleichschenkligen Dreiecks für die Spitze folgt für das regelmäfsige n-Eck mit Seite b und Radius ϱ des einbeschriebenen Kreises das polare Trägheitsmoment

$$T_p = \frac{nb\varrho}{48}(12\varrho^2 + b^2),$$

Fig. 71.

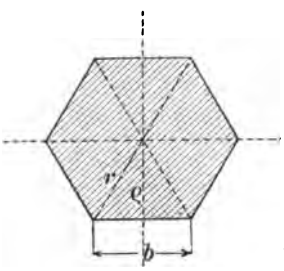
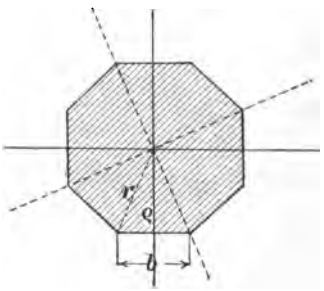


Fig. 72.



folglich sind für jede Symmetrieachse (wie später gezeigt wird sogar für jede beliebige Schwerpunktsachse) die Trägheitsmomente

$$T_1 = T_2 = \frac{nb\varrho}{96}(12\varrho^2 + b^2).$$

Dadurch erhält man folgende Reihe von axialen Trägheitsmomenten, die für jede Schwerpunktsachse der regelmäfsigen Vielecke gelten:

a) regelmäfsiges Dreieck: $T = \frac{b^4}{96}\sqrt{3}$, denn hier ist $\varrho = \frac{b}{6}\sqrt{3}$

b) „ Viereck: $T = \frac{b^4}{12}$, „ „ „ $\varrho = \frac{b}{2}$

c) „ Sechseck: $T = \frac{5\,b^4}{16}\sqrt{3}$, „ „ „ $\varrho = \frac{b}{2}\sqrt{3}$

d) „ Achteck: $T = \frac{b^4}{12}(11 + 8\sqrt{2})$, „ „ „ $\varrho = \frac{b}{2}(1 + \sqrt{2})$.

So könnte man fortfahren. — Beim Achteck z. B. gestaltet sich die Rechnung folgendermafsen:

$$T = \frac{8b}{96}\,\frac{b}{2}(1+\sqrt{2})\left[12\,\frac{b^2}{4}(1+\sqrt{2})^2 + b^2\right]$$

$$= \frac{b^4}{24}(1+\sqrt{2})\left[3\,(1+2+2\sqrt{2}) + 1\right] = \frac{b^4}{24}(1+\sqrt{2})(10+6\sqrt{2})$$

$$= \frac{b^4}{12}(1+\sqrt{2})(5+3\sqrt{2}) = \frac{b^4}{12}(5+5\sqrt{2}+3\sqrt{2}+6)$$

$$= \frac{b^4}{12}(11+8\sqrt{2}).$$

Führt man in die Formel des n-Ecks den Umfang $u = \frac{b}{n}$ ein, so geht sie über in

$$T_1 = T_2 = \frac{n\,\frac{u}{n}\,\varrho}{96}\left(12\,\varrho^2 + \frac{u^2}{n^2}\right) = \frac{u\varrho}{96}\left(12\,\varrho^2 + \frac{u^2}{n^2}\right).$$

66) Kreisfläche. Für $n = \infty$ folgt aus der Formel für das regelmäfsige n-Eck, wenn man $u = 2\varrho\pi$ einsetzt,

$$\frac{2\varrho\pi\varrho}{96}(12\,\varrho^2 + 0) = \frac{\varrho^4\pi}{4},$$

oder, wenn man den Durchmesser d einführt,

$$T = \frac{\pi d^4}{64},$$

dagegen, wie in Nr. 42,

$$T_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Fig. 73.

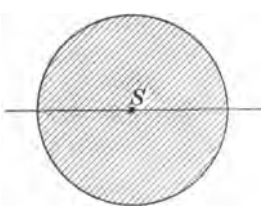
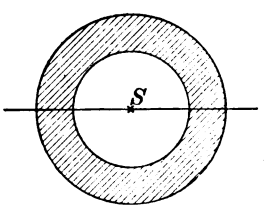


Fig. 74.



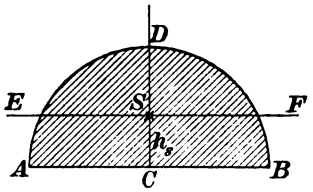
67) Fläche des concentrischen Kreisrings (Hohlsäule).

$$T = \frac{\pi}{64}\left(d^4 - d_1^4\right), \quad T_p = \frac{\pi}{32}\left(d^4 - d_1^4\right).$$

68) Fläche des Halbkreises.

Nach Nr. 6) ist $h_s = \frac{4r}{3\pi}$, in Bezug auf AB ist nach vorigem Beispiele

Fig. 75.



$$T = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi r^4}{8}.$$

Demnach wird für EF

$$T_1 = \frac{\pi r^4}{8} - h_s^2 \frac{r^2\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi r^4}{8} - \frac{16\, r^2}{9\pi^2} \frac{r^2\pi}{2} = \frac{\pi r^4}{8} - \frac{8 r^4}{9\pi}$$

oder

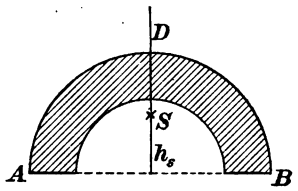
$$T_1 = r^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) = d^4\left(\frac{\pi}{128} - \frac{1}{18\pi}\right). \quad \text{(Abgerundet } T_1 = 0{,}11\, r^4.\text{)}$$

Dagegen ist $T_2 = \frac{\pi r^4}{8}$, also

$$T_p = r^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) + \frac{\pi r^4}{8} = r^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{8}{9\pi}\right).$$

69) Fläche des halben concentrischen Kreisrings (Halbsäule).

Fig. 76.



Nach Nr. 6) ist $h_s = \frac{4\left(r^3 - r_1^3\right)}{3\pi\left(r^2 - r_1^2\right)}$, aufserdem für AB

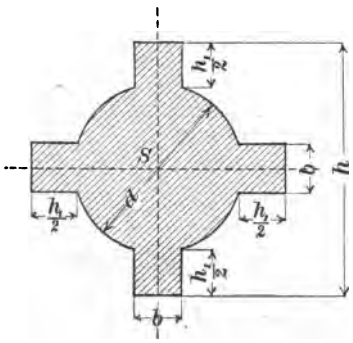
$$T = \frac{\pi}{8}\left(r^4 - r_1^4\right),$$

folglich

$$T_1 = \frac{\pi}{8}\left(r^4 - r_1^4\right) - h_s^2 \pi \frac{r^2 - r_1^2}{2},$$

$$T_2 = \frac{\pi}{8}\left(r^4 - r_1^4\right), \quad T_p = \frac{\pi}{4}\left(r^4 - r_1^4\right) - h_s^2 \pi \frac{r^2 - r_1^2}{2}.$$

Fig. 77.



70) Querschnitt der Flügelachse und der Säule mit Verstärkungsrippen.

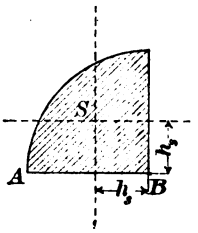
Die Technik betrachtet die Querschnitte der Verstärkungsrippen angenähert als Rechtecke.

Der Kreis giebt $\frac{\pi d^4}{64}$, die senkrecht stehenden Rechtecke nach der Formel für einfache Gurtungen $\frac{b}{12}(h^3 - d^3)$, die horizontal liegenden

$2\frac{h_1}{2}\frac{b^3}{12}=\frac{h_1 b^3}{12}$, man erhält also $T_1=T_2=\frac{\pi d^4}{64}+\frac{1}{12}[b(h^3-d^3)+h_1 b^3]$. Das polare Moment ist $T_p=2T_1$.

71) Fläche des Viertelkreises.

Fig. 78.



Für AB hat man $T=\frac{r^4\pi}{16}$, der Schwerpunktsabstand ist $h_s=\frac{4r}{3\pi}$, daraus folgt (vgl. Nr. 68)

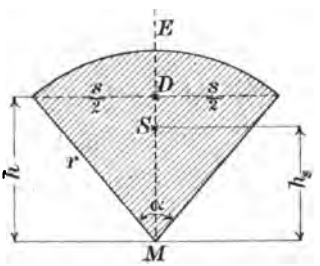
$$T_1=T_2=\frac{r^4\pi}{16}-h_s^2\frac{r^2\pi}{4}=\frac{r^4\pi}{16}-\frac{16\,r^2}{9\,\pi^2}\frac{r^2\pi}{4}$$

$$=r^4\left[\frac{\pi}{16}-\frac{4}{9\,\pi}\right],\quad T_p=r^4\left[\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\,\pi}\right].$$

72) Fläche des allgemeinen Kreisausschnittes (Sektors).

Vorläufig kann nur das polare Trägheitsmoment berechnet werden. Für die Kreisfläche war dieses $\frac{r^4\pi}{2}$, also ist es für den Sektor in Bezug auf den Punkt M

Fig. 79.



$$T=\frac{r^4\pi}{2}\frac{\alpha^0}{360^0}=\frac{r^4\pi\alpha}{720},$$

sobald α in Graden gegeben ist. Nach Nr. 10) ist

$$h_s=\frac{2\,r\,s}{3\,b}\quad\begin{pmatrix}b=\text{Bogen}\\ s=\text{Sehne}\end{pmatrix}$$

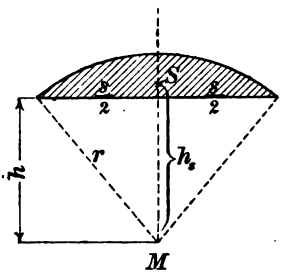
folglich ist für S

$$T_p=\frac{r^4\pi\alpha}{720}-h_s^2\cdot r^2\pi\frac{\alpha}{360}=\frac{r^2\pi\alpha}{360}\left[\frac{r^2}{2}-h_s^2\right].$$

Zur Ableitung der axialen Momente sind später zu entwickelnde Hülfssätze nötig.

73) Fläche des Kreisabschnittes (Segmentes).

Fig. 80.



Auch hier kann zunächst nur das Polarmoment berechnet werden. Vom Sektor ist das Dreieck abzuziehen, also wird für M

$$T_p=\frac{r^4\pi\alpha}{720}-\frac{sh}{48}(12\,h^2+s^2).$$

Nach Nr. 7) ist $h_s=\frac{s^2}{12F}$, also wird für den Schwerpunkt S

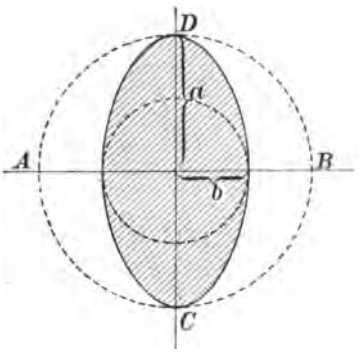
$$T_p=\frac{r^4\pi\alpha}{720}-\frac{sh}{48}(12\,h^2+s^2)-h_s^2F,$$

wo $F=\frac{r^2\pi\alpha}{360}-\frac{sh}{2}$ ist.

74) Fläche der Ellipse. (Vgl. Nr. 12.)

Aus der Formel für den Kreis mit Radius a folgt durch Verkleinerung der Sehnen mittels des konstanten Faktors $\frac{b}{a}$

Fig. 81.



$$T_1 = \frac{a^4\pi}{4} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a^3 b\pi}{4}.$$

Für die Achse CD nimmt man den kleinen Kreis zu Hülfe und findet mittels des konstanten Vergrößerungsfaktors $\frac{a}{b}$

$$T_2 = \frac{b^4\pi}{4} \frac{a}{b} = \frac{ab^3\pi}{4}.$$

Das Polarmoment wird

$$T_p = \frac{ab\pi}{4}(a^2 + b^2) = \frac{F}{4}(a^2 + b^2).$$

75) Fläche der symmetrischen Halbellipse.

Erste Form. Für AB ist $T' = \frac{a^3 b\pi}{8}$, da aber nach Nr. 12) $h_s = \frac{4a}{3\pi}$ ist, so folgt für die horizontale Schwerpunktsachse

$$T_1 = \frac{a^3 b\pi}{8} - \left(\frac{4a}{3\pi}\right)^2 \frac{ab\pi}{2},$$

dagegen ist $T_2 = \frac{a^3 b\pi}{8}$, also $T_p = \frac{a^3 b\pi}{4} - \left(\frac{4a}{3\pi}\right)^2 \frac{ab\pi}{2}$.

Fig. 82.

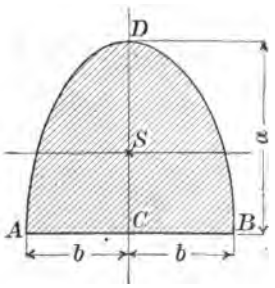
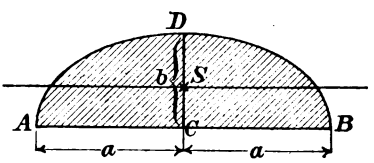


Fig. 83



Zweite Form. Für AB ist $T' = \frac{ab^3\pi}{8}$, nach Nr. 12) ist $h_s = \frac{4b}{3\pi}$, also folgt für die horizontale Schwerpunktsachse

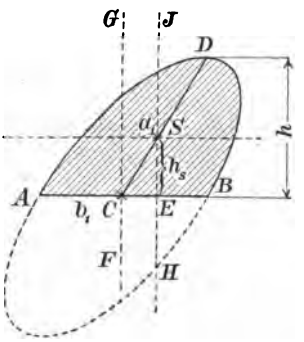
$$T_1 = \frac{ab^3\pi}{8} - \left(\frac{4b}{3\pi}\right)^2 \frac{ab\pi}{2},$$

während $T_2 = \frac{ab^3\pi}{8}$ ist. $T_p = \frac{ab^3\pi}{4} - \left(\frac{4b}{3\pi}\right)^2 \frac{ab\pi}{2}$.

76) Fläche der unsymmetrischen Halbellipse.

Diese allgemeinere Form läfst sich aus Fig. 82 durch Horizontalverschiebung der Elementarstreifen herstellen, wobei weder das statische Moment, noch die Schwerpunktshöhe, noch das axiale Trägheitsmoment für AB geändert wird. Die Fläche der Halbellipse bleibt dabei $\frac{b_1 h \pi}{2}$, oder, da $h = a_1 \sin\gamma$ ist, $F = \frac{a_1 b_1 \pi \sin\gamma}{2}$. Ferner ist $h_s = \frac{4h}{3\pi}$, ebenso $CS = \frac{4a_1}{3\pi}$, $CE = \frac{4a_1}{3\pi}\cos\gamma = e_s$. Für AB ist

Fig. 84.



$$T' = \frac{b_1 h^3 \pi}{8} = \frac{b_1 (a_1 \sin\gamma)^3 \pi}{8}$$
$$= \frac{F}{4} a_1^2 \sin^2\gamma = \frac{F}{4} h^2,$$

folglich für die horizontale Schwerpunktsachse

$$T_1 = \frac{b_1 h^3 \pi}{8} - \left(\frac{4h}{3\pi}\right)^2 \frac{b_1 h \pi}{2} = \frac{(a_1 \sin\gamma)^3 b_1 \pi}{8} - \left(\frac{4 a_1 \sin\gamma}{3\pi}\right)^2 \frac{a_1 b_1 \pi \sin\gamma}{2}.$$

T_2 kann mit Hülfe von T_p berechnet werden, denn für C ist, wenn a und b die wirklichen Halbachsen der Ellipse bedeuten, nach Nr. 74

$$T_p' = \frac{ab\pi}{8}(a^2 + b^2) = \frac{F}{4}(a^2 + b^2).$$

Diese Halbachsen a und b kann man mittels der aus der Geometrie bekannten Formeln

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + b_1^2,$$
$$ab = a_1 b_1 \sin\gamma$$

berechnen, was aber hier überflüssig ist. Einsetzung giebt nämlich sofort

$$T_p = \frac{a_1 b_1 \sin\gamma}{8}\left(a_1^2 + b_1^2\right) = \frac{F}{4}\left(a_1^2 + b_1^2\right).$$

Für die durch C gehende Vertikalachse wird

$$T_2' = T_p' - T_1' = \frac{F}{4}\left(a_1^2 + b_1^2\right) - \frac{F}{4} h^2 = \frac{F}{4}\left(a_1^2 + b_1^2 - h^2\right).$$

Verschiebung um $e_s = \frac{4 a_1 \cos\gamma}{3\pi}$ giebt für die senkrechte Schwerpunktsachse HJ

$$T_2 = \frac{F}{4}\left(a_1^2 + b_1^2 - h^2\right) - \left(\frac{4 a_1 \cos\gamma}{3\pi}\right)^2 F,$$

oder

$$T_2 = F\left[\frac{a_1^2 + b_1^2 - h^2}{4} - \left(\frac{4\,a_1 \cos\gamma}{3\,\pi}\right)^2\right].$$

Hier ist

$$a_1^2 - h^2 = a_1^2 - a_1^2 \sin^2\alpha = a_1^2 \cos^2\alpha,$$

es wird also

$$T_2 = F\left[\frac{a_1^2 \cos^2\alpha + b_1^2}{4} - \left(\frac{4\,a_1 \cos\gamma}{3\,\pi}\right)^2\right].$$

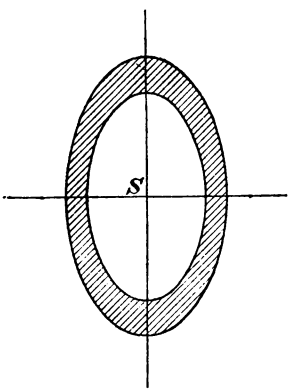
Endlich ist noch für S

$$T_p = F\left[\frac{a_1^2 + b_1^2}{4} - \left(\frac{4\,a_1}{3\,\pi}\right)^2\right].$$

Polarmomente für Ellipsenabschnitte und Ellipsenfaktoren lassen sich aus den für Kreisabschnitte und Kreisausschnitte berechneten Momenten leicht ableiten.

77) Elliptischer Ringquerschnitt. Sind a_1 und a_2 die grofsen, b_1 und b_2 die kleinen Halbachsen, so wird

Fig. 85.



$$T_1 = \frac{a_1^3 b_1 \pi}{4} - \frac{a_2^3 b_2 \pi}{4} = \frac{\pi}{4}\left(a_1^3 b_1 - a_2^3 b_2\right).$$

Ebenso

$$T_2 = \frac{\pi}{4}\left(a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3\right),$$

$$T_p = T_1 + T_2$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[a_1 b_1\left(a_1^2 + b_1^2\right) - a_2 b_2\left(a_2^2 + b_2^2\right)\right].$$

Hier ist zu bemerken, dafs die Wandstärken verschieden ausfallen. Ist $a : a_1 = b : b_1$, so erhält man ähnliche Ellipsen. Nimmt man die Wandstärke überall gleich grofs, so wird die eine Curve eine solche 4ten Grades, und zwar die Parallelcurve der Ellipse. Bei geringen Wandstärken ist jedoch der Unterschied so klein, dafs er für praktische Berechnungen vernachlässigt werden kann, so dafs die gegebenen Formeln fortgelten.

78) Elliptischer Halbring. Gleichung für die statischen Momente in Bezug auf AB:

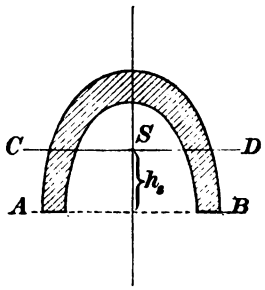
$$h_s \cdot F = \frac{4\,a_1}{3\,\pi} F_1 - \frac{4\,a_2}{3\,\pi} F_2,$$

folglich

$$h_s = \frac{\frac{4a_1}{3\pi}\cdot\frac{a_1 b_1 \pi}{2} - \frac{4a_2}{3\pi}\frac{a_2 b_2 \pi}{2}}{\frac{a_1 b_1 \pi}{2} - \frac{a_2 b_2 \pi}{2}} = \frac{4}{3\pi}\frac{a_1^2 b_1 - a_2^2 b_2}{a_1 b_1 - a_2 b_2}.$$

In Bezug auf AB ist

Fig. 86a.



$$T = \frac{\pi}{8}\left(a_1^3 b_1 - a_2^3 b_2^3\right),$$

folglich in Bezug auf die Schwerpunktsachsen

$$T_1 = \frac{\pi}{8}\left(a_1^3 b_1 - a_2^3 b_2\right) - h_s^2 \cdot \frac{\pi}{2}(a_1 b_1 - a_2 b_2),$$

$$T_2 = \frac{\pi}{8}\left(a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3\right); \quad T_p = T_1 + T_2.$$

Auch der schräge (unsymmetrische) Halbring läfst sich im Anschlufs an Nr. 76) behandeln.

B. Bemerkungen und numerische Beispiele.

79) Eine grofse Anzahl weiterer Übungsbeispiele über die Querschnittsformen des praktischen Maschinenbaues liefse sich hier anschliefsen. Einige sind durch Zeichnungen angedeutet. Figur 86 b, c, d, e. — In der Regel beschränkt sich aber die Praxis auf die behandelten rein schematisch aufzufassenden Formen.

Fig. 86b.

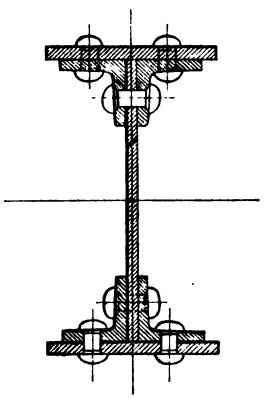
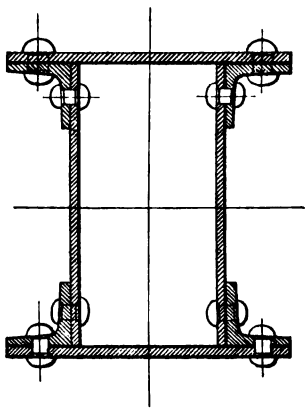


Fig. 86c.



Sind die Querschnitte nicht einheitlich, sondern in ihren Teilen durch Nieten mit einander verbunden, so ist darauf zu achten, dafs mindestens der Einflufs der Nietlöcher berücksichtigt werden mufs. An einigen der Zeichnungen ist dies angedeutet. Bei Gurtungen, die grofse Entfernungen von der neutralen Achse haben, kann der

Einfluſs sehr groſs werden. Die Nieten werden in möglichst geringer Zahl in denselben Querschnitt gelegt, damit die Festigkeit nicht zu stark vermindert werde. In den Zeichnungen ist dies durch Schraffierung angedeutet.

Fig. 86 d.

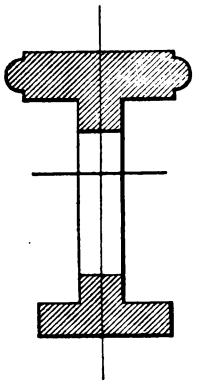
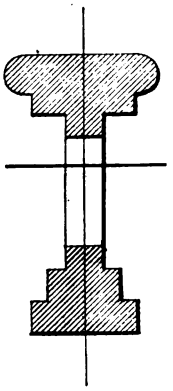


Fig. 86 e.



Die nachstehenden Übungsaufgaben sollen nicht etwa die Festigkeitslehre ersetzen, sondern sie setzen diese voraus. Es soll nur gezeigt werden, wie mannigfaltig die Anwendung der bisher erläuterten Begriffe ist. Die Maſse sind in Millimetern gegeben. Neuerdings wird auch mit Centimetern gerechnet.

80) **Aufgabe.** Bei einem T-Träger sei $h_1 = 160$ mm, $h_2 = 20$ mm, $b_1 = 20$ mm, $b_2 = 100$ mm. Wie groſs ist das wichtigste Trägheitsmoment und wie groſs sind die Widerstandsmomente (oder Querschnittsmoduln)?

Auflösung. $y_s' = 115$ mm, also $y_s'' = 65$ mm, $T_s = 17\,040\,000$, $W_1 = \frac{T_s}{y_s'} = 262\,200$, $W_2 = \frac{T_s}{y_s''} = 148\,200$.

81) **Aufgabe.** Bei einem I-Träger sei die Gesamthöhe $h = 400$ mm, die Teilhöhen $h_1 = 368$ mm, $h_2 = 16$ mm, aufserdem $b = 140$ mm, $b_2 = 16$ mm, also $b - b_2 = b_1 = 124$ mm. Wie groſs T_s und W?

Auflösung. $y_s = 200$ mm, $T_s = 231\,690\,000$, $W_1 = W_2 = 1\,158\,000$.

82) **Aufgabe.** Bei einem ⊓-Eisen sei $h = 100$ mm, $h_1 = 80$ mm, also $h_2 = 20$ mm; $b = 20$ mm, $b_1 = 200$ mm, also $b_2 = 160$ mm. Wie groſs T_s, W_1 und W_2?

Auflösung. $y_s' = 32$ mm, $y_s'' = 68$ mm, $T_s = 6\,390\,000$, $W_1 = 197\,000$, $W_2 = 93\,970$.

83) **Aufgabe.** Bei dem ∧-Eisen der Fig. 65 sei $b = 100$ mm, $b_2 = 20$ mm. Wie groſs T_s, W_1 und W_2?

Auflösung. $y_s' = 46$ mm, $y_s'' = 39$ mm, $T_s = 1\,360\,000$, $W_1 = 29\,600$, $W_2 = 34\,900$.

84) **Aufgabe.** Eine schmiedeeiserne Achse von 2 m Länge soll bei einer zulässigen Spannung von 5 kg eine Last von 20 000 kg in der Mitte tragen. Wie stark ist sie bei kreisförmigem Querschnitt zu nehmen?

Die Festigkeitslehre giebt die elementar abzuleitende Gleichung $\frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = W \cdot S$. Daraus folgt $\frac{Pl}{4} = \frac{\pi d^3}{32} S$, also

$$d = \sqrt[3]{\frac{8Pl}{\pi S}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 20000 \cdot 2000}{\pi \cdot 5}} = \sim 274 \text{ mm}.$$

85) **Aufgabe.** Ein I-Träger von den Dimensionen $h = 400$ mm, $h_2 = 30$ mm, also $h_1 = 340$ mm, $b = 200$ mm, $b_2 = 25$ mm, also $b_1 = b - b_2 = 175$ mm, habe 6 m Länge. Wie stark darf er, zweifach frei aufliegend, in der Mitte belastet werden, wenn die zulässige Spannung 7,5 kg betragen darf?

Auflösung. Die Festigkeitslehre giebt die Traggleichung $P = \frac{4SW}{l}$, und zwar ist $W = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{6h} = 2\,468\,000$. Es folgt $P = \sim 12\,340$ kg.

86) **Aufgabe.** Eine schmiedeiserne Achse von 2 m Länge und 274 mm Durchmesser sei bis zur Hälfte des Radius ausgebohrt. Wie stark darf sie bei 5 kg zulässiger Spannung belastet werden?

Auflösung. Zunächst ist $W = \frac{\pi(d^4 - d_1^4)}{32d} = 1\,890\,000$. $P = \frac{4WS}{l}$ giebt 18 900 kg.

87) **Bemerkung.** Bei gleichmäfsiger Belastung über die ganze Länge gilt für den frei aufliegenden Träger die Formel $P = \frac{8SW}{l}$. Der Krümmungsradius des Trägers wird an jeder Stelle berechnet aus $\varrho = \frac{TE}{M} = \frac{aE}{S}$, wo T das Trägheitsmoment, E der Elastizitätsmodul des Materials, M das biegende Moment ist.

Hat z. B. ein schmiedeiserner Freiträger rechteckigen Querschnitts von $b = 50$ mm und $h = 90$ mm am freien Ende die dem Tragmodul entsprechende Probelastung ($S = 15$ kg), so ist $\varrho = \frac{45 \cdot 20000}{15} = 60000$ mm $= 60$ m.

Für die Strebfestigkeit giebt die elementare Annäherungsmethode $P = \frac{2JE}{l^2}$, die genauere Eulersche Methode $P = \frac{\pi^2}{4}\frac{JE}{l^2}$ für den sogenannten ersten Fall.

88) **Aufgabe.** Der Querschnitt einer hohlen Säule mit vier Verstärkungsrippen habe die Dimensionen $d = 200$ mm, $d_1 = 160$ mm, also Wandstärke $\delta = 20$ mm, ferner sei für die Rippen $b = 20$ mm, $h = 60$ mm. Wie grofs ist das Trägheitsmoment T?

Auflösung.

$$T = \frac{\pi}{64}(200^4 - 160^4) + \frac{20}{12}\left[(200 + 120)^3 - 200^3\right] + \frac{120}{12} \cdot 20^3$$
$$= 87\,731\,000.$$

89) **Aufgabe.** Ein Schleifstein habe den Radius $r = 1$ m und das Gewicht 1000 kg. Wieviel Drehungsenergie besitzt er bei 1, 2, 3 Umdrehungen in der Sekunde?

Auflösung. Bei einer Umdrehung in der Sekunde ist die Energie

$$E_1 = m\frac{r^2\vartheta^2}{2\,2} = \frac{1000}{9{,}81}\frac{1^2}{2}\frac{4\pi^2}{2} = 1006 \text{ mkg},$$

bei 2 Umdrehungen

$$E_2 = 4 \cdot 1006 = 4024 \text{ mkg},$$

bei 3 Umdrehungen

$$E_3 = 9 \cdot 1006 = 9054 \text{ mkg}.$$

90) **Aufgabe.** Ein Schwungring wiege 20 000 kg und habe die Radien $r = 4$ m und $r_1 = 3{,}6$ m bei einfach rechteckigem Querschnitt. Wie grofs ist seine Drehungswucht (Energie) bei 1, 2, 3 Umdrehungen in der Sekunde?

Auflösung.

$$T = \frac{m \cdot (r^2 + r_1^2)}{2},$$

folglich

$$E_1 = \frac{m(r^2 + r_1^2)}{2}\frac{4\pi^2}{2} = \frac{20000}{9{,}81} \cdot \frac{4^2 + 3{,}6^2}{2} \cdot \frac{4\pi^2}{2} = 582\,720 \text{ mkg},$$

demnach

$$E_2 = 4 \cdot 582720 = 2330880 \text{ mkg}, \quad E_3 = 9 \cdot 582720 = 5244480 \text{ mkg}.$$

91) **Aufgabe.** Ein Schwungring habe die Radien $r = 3$ m und $r_1 = 2{,}8$ m und das Gewicht 10 000 kg. Jeder der sechs Radarme wiege 300 kg, je zwei davon mögen als ein Rechteck von der Diagonale $d = 2\,r_1$ betrachtet werden. Wie grofs ist die Drehungswucht bei 1, 2, 3 Umdrehungen in der Sekunde?

Auflösung.

$$T = \frac{m_1(r^2 + r_1^2)}{2} + 3 \cdot 600 \cdot \frac{m_2}{12}(2r_1)^2,$$

wo

$$m_1 = \frac{10000}{9{,}81}, \quad m_2 = \frac{600}{9{,}81}$$

ist. Es wird

$$E_1 = 26\,400 \text{ mkg}, \quad E_2 = 105\,600 \text{ mkg}, \quad E_3 = 237\,600 \text{ mkg}.$$

92) **Bemerkung.** Wirken an einer irgendwie gestalteten Scheibe drehende Kräfte $p_1, p_2, p_3 \ldots$ an den Radien $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ und ist T das gesamte Trägheitsmoment, so wird die dem Radius 1 entsprechende Winkelbeschleunigung

$$\gamma = \frac{\Sigma p \varrho}{T}$$

und die Bewegungsformeln, die den drei Fallformeln entsprechen, werden

$$\vartheta = \gamma t, \quad \widehat{w} = \tfrac{1}{2}\gamma t^2, \quad \vartheta = \sqrt{2\gamma \widehat{w}}.$$

93) **Aufgabe.** Um die Achse einer Kreisscheibe sei ein Faden geschlungen, der am freien Ende festgehalten werde, so dass die Scheibe nur drehend fallen kann. Wie schnell fällt sie und wie grofs ist die Fadenspannung?

Auflösung. Arbeit der Schwerkraft gleich der Energiesumme aus der fortschreitenden und drehenden Bewegung, also

$$m\frac{v^2}{2} + T\frac{\vartheta^2}{2} = ph.$$

Die Drehungsgeschwindigkeit am Achsenradius ϱ ist gleich der Fallgeschwindigkeit v, folglich ist die erstere, am Radius 1 gemessen, $\vartheta = \frac{v}{\varrho}$, also wird

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{T}{2}\frac{v^2}{\varrho^2} = ph,$$

die dritte Fallformel wird also

$$v = \sqrt{2\left(\frac{m\varrho^2}{m\varrho^2 + T}g\right)h},$$

so dafs, wie aus $v = \sqrt{2g_1 h}$ folgt, die Beschleunigung des Falles wird

$$g_1 = \frac{m\varrho^2}{m\varrho^2 + T}g.$$

Die Fadenspannung wird gleich $g - g_1$.

94) **Aufgabe.** Eine Kreisscheibe werde mit den Achsenenden auf zwei schräge Leisten gelegt und rolle so, ohne zu gleiten, auf schiefer Ebene herab. Welcher Art ist die Bewegung?

Auflösung. Wie vorher wird

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2}{2}\frac{v^2}{2\varrho^2} = mgh$$

oder

$$\frac{v^2}{2}\frac{2\varrho^2 + r^2}{2\varrho^2} = gh,$$

also

$$v = \sqrt{2\left(\frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2}g\right)h} = \sqrt{2\left(\frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2}g\sin\alpha\right)l},$$

wo l die Länge, α den Neigungswinkel der schiefen Ebene bedeutet. Die fortschreitende Bewegung hat also die Beschleunigung

$$g_1 = \frac{2\varrho^2 \sin\alpha}{r^2 + 2\varrho^2} g.$$

95) **Aufgabe.** Eine Rechtecksscheibe schwinge als Pendel um eine senkrecht auf ihr stehende, durch den obersten Punkt der Mittellinie gehende Achse. Wie groſs ist die Schwingungsdauer?

Auflösung. Für ein mathematisches Pendel ist $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, hier ist $l = \frac{T_A}{M_A}$, wo T_A das polare Trägheitsmoment in Bezug auf den Drehungspunkt A, M_A das statische Moment in Bezug auf diesen Punkt bedeutet, also

$$l = \frac{m\frac{d^2}{12} + m\left(\frac{h}{2}\right)^2}{m\frac{h}{2}} = \frac{d^2 + 3h^2}{6h},$$

wo d die Diagonale des Rechtecks ist. Also wird

$$t = \pi\sqrt{\frac{d^2 + 3h^2}{6gh}}.$$

96) **Aufgabe.** Ein Pendel bestehe aus einer Scheibe vom Radius r und dem Gewicht p_1 und einer Stange von der Länge l und dem Gewicht p_2. Wie schwingt es?

Auflösung. Wird die Stange als Rechtecksscheibe betrachtet, so ist für sie in Bezug auf den obersten Punkt

$$T_2 = \frac{m_2 d^2}{12} + m_2\left(\frac{h}{2}\right)^2.$$

Ist das Rechteck sehr schmal, so ist $d = h$ zu setzen und man erhält

$$T_2 = \frac{m_2 h^2}{12} + m_2\frac{h^2}{4} = m_2\frac{h^2}{3} = m_2\frac{l^2}{3}.$$

Für die Scheibe ist

$$T_1 = \frac{m_1 r^2}{2} + m_1(r + l)^2 = \frac{m_1}{2}[r^2 + 2(r + l)^2].$$

Das gesamte Trägheitsmoment also wird

$$\frac{m_1}{2}[r^2 + 2(r + l)^2] + m_2\frac{l^2}{3}.$$

Das statische Moment wird $m_1(r + l) + m_2 \cdot \frac{l}{2}$, folglich ist die reducierte Pendellänge

$$l = \frac{T}{M} = \frac{\frac{m_1}{2}[r^2 + 2(r+l)^2] + m_2 \frac{l^2}{3}}{m_1(r+l) + m_2 \frac{l}{3}} = \frac{3p_1[r^2 + 2(r+l)^2] + 2m_2 l^2}{3[2m_1(r+l) + m_2 l]}.$$

Dies ist in $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ einzusetzen.

97) **Aufgabe.** Eine kurze cylindrische Triebwelle soll bei zulässiger Schubspannung S ein Moment $P \cdot R$ (in Kilogrammen und Millimetern) übertragen. Wie stark ist sie zu nehmen?

Auflösung. Die Festigkeit giebt die Traggleichung $PR = S W_p$, wo $W_p = \frac{1}{r} T_p$ ist. Also:

$$PR = S \cdot \frac{\pi d^4}{32} \cdot \frac{2}{d} = \frac{S\pi d^3}{16}.$$

Demnach mufs werden

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\,PR}{\pi S}}.$$

Beispiel. Sind 10 000 kg am Kurbelradius 500 mm wirkend zu übertragen, und ist 6 kg pro qmm die zulässige Spannung, so wird $d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 10\,000 \cdot 500}{\pi \cdot 6}} = \sim 162$ mm. Läfst man nur 4 kg Spannung zu, so wird $d = 204$ mm.

98) **Bemerkung.** Die Kraft P wirke stets am Radius R, dann ist die Leistung bei einer Umdrehung $2R\pi P$ in Millimeter-Kilogrammen, bei n minutlichen Umdrehungen hat man das n-fache, also auf die Sekunde reduciert die Arbeit $\frac{n \cdot 2R\pi P}{60}$. Dividiert man durch 75 000, so hat man die Leistung in Pferdestärken. Ist die Anzahl der letzteren N, so ist also $N = \frac{2R\pi Pn}{60 \cdot 75\,000}$, also

$$PR = 716\,200 \frac{N}{n}.$$

Setzt man dies in die letzte Formel ein, so folgt als Wellenstärke

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 716\,200}{\pi S} \frac{N}{n}}.$$

99) **Aufgabe.** Eine kurze schmiedeiserne Welle soll 200 Pferdestärken bei 120 Touren übertragen. Wie stark mufs sie genommen werden, wenn 6 kg Spannung zugelassen werden?

Auflösung.

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 716\,200}{\pi \cdot 6} \cdot \frac{200}{120}} = \sim 100 \text{ mm}.$$

100) **Aufgabe.** Die Panzerfregatte „König Wilhelm“ hat eine Maschine von 8325 indicierten Pferdestärken bei 63,86 Touren. Wie stark müfste die schmiedeiserne Schraubenwelle zu nehmen sein bei 6 kg zulässiger Spannung?

Auflösung.

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 716\,200}{\pi \cdot 6} \cdot \frac{8325}{63{,}86}} = \sim 430 \text{ mm}.$$

Der Erbauer hat 457 mm genommen.

101) **Bemerkung.** Die Lehre von der Drehungsfestigkeit zeigt elementar, dafs die Verdrehung in Graden

$$\vartheta = \frac{360\, l S}{d \pi G}$$

wird, wenn l die Länge der Welle in Millimetern, S die Randspannung, d der Durchmesser und G der sogenannte Gleitungsmodul ($\frac{2}{5}$ des Elasticitätsmoduls) ist. Nach Nr. 97) ist aber $S = \frac{16\, PR}{\pi d^3}$, setzt man dies in die vorige Gleichung ein, so wird

$$\vartheta = \frac{360\, l\, 16\, PR}{d^4 \pi^2 G}, \quad \text{also} \quad d = \sqrt[4]{\frac{360\, l\, 16\, PR}{\vartheta \pi^2 G}},$$

oder, wenn man die Tourenzahl und die Zahl der Pferdestärken einsetzt,

$$\vartheta = \frac{360\, l\, 16 \cdot 716\,200\, \frac{N}{n}}{d^4 \pi^2 G}, \quad \text{also} \quad d = \sqrt[4]{\frac{360\, l\, 16 \cdot 716\,200\, \frac{N}{n}}{\vartheta \pi^2 G}}.$$

Setzt man nun fest, dafs die Verdrehung einer längeren Transmissionswelle höchstens $\frac{1}{4}$ Grad auf das laufende Meter betragen soll, so ist für ϑ der Werth $\frac{1}{4}$, für l der Wert 1000 einzusetzen. Dann folgt als nötige Wellenstärke

$$d = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 360 \cdot 1000 \cdot 16\, PR}{\pi^2 G}},$$

oder, wenn Pferdestärken und Tourenzahlen eingesetzt werden,

$$d = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 360 \cdot 1000 \cdot 16 \cdot 716\,200}{\pi^2 G} \cdot \frac{N}{n}}.$$

102) **Aufgabe.** Eine schmiedeiserne Welle habe 5 m Länge und 120 mm Dicke, die Randspannung sei 6 kg. Um wieviel Grad verdreht sie sich dabei, und um wieviel auf das laufende Meter? ($G = 8000$ zu setzen.)

Auflösung.

$$\vartheta = \frac{360\,lS}{d\pi G} = \frac{360 \cdot 5000 \cdot 6}{120 \cdot \pi \cdot 8000} = \sim 3{,}58^0,$$

also um $0{,}716^0$ auf das laufende Meter.

103) **Aufgabe.** Eine schmiedeiserne Welle von 4 m Länge soll eine Kraft von 5000 kg am Radius 500 mm übertragen. Ihre Dicke sei 150 mm. Um wieviel Grad verdreht sie sich?

Auflösung.

$$\vartheta = \frac{360\,l\,16\,PR}{d^4\pi^2 G} = \frac{360 \cdot 4000 \cdot 16 \cdot 5000 \cdot 500}{150^4 \cdot \pi^2 \cdot 8000} = 1{,}44^0,$$

also um $0{,}36^0$ auf das laufende Meter.

104) **Aufgabe.** Eine schmiedeiserne Welle übertrage bei einer Länge von 3 m und einer Dicke von 200 mm 300 Pferdestärken bei 100 Touren. Um wieviel verdreht sie sich?

Auflösung.

$$\vartheta = \frac{360\,l\,16 \cdot 716\,200}{d^4\pi^2 G}\,\frac{N}{n} = \frac{360 \cdot 3000 \cdot 16 \cdot 716\,200 \cdot 300}{200^4 \cdot \pi^2 \cdot 8000} = 0{,}3^0,$$

also $0{,}1^0$ auf das laufende Meter.

105) **Aufgabe.** Eine schmiedeiserne Transmissionswelle soll bei $\frac{1}{4}$ Grad Verdrehung auf das laufende Meter 10 000 kg am Kurbelradius 500 mm übertragen. Wie stark ist sie zu nehmen?

Auflösung.

$$d = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 360 \cdot 1000 \cdot 16 \cdot 10000 \cdot 500}{\pi^2 \cdot 8000}} = \sim 195 \text{ mm}.$$

106) **Aufgabe.** Eine Schiffsschraubenwelle soll 10 000 Pferdestärken bei 70 Touren übertragen. Wie stark fällt sie aus bei der Berechnung auf Verdrehung $\frac{1}{4}$ Grad auf das laufende Meter? Wie stark bei Festigkeitsberechnung und 6 kg zulässiger Spannung?

Auflösung.

$$d = 415{,}6 \text{ mm bezw. } 442{,}85 \text{ mm}.$$

Letzteres ist zu wählen.

107) Bezüglich der Wellen von nicht kreisförmigem Querschnitt sei darauf hingedeutet, dafs man die polaren Trägheitsmomente, wie St. Venant bewiesen hat, nicht ohne weiteres anwenden darf. Der Grund liegt darin, dafs die Querschnitte bei der Verdrehung nicht

eben bleiben, was beim Kreisquerschnitt unter gewissen Voraussetzungen als richtig angenommen werden darf. Dagegen behalten die polaren Trägheitsmomente für andere dynamische Fragen ihre Bedeutung vollkommen bei.

108) Bezüglich der Biegungsfestigkeit sei noch hingewiesen auf die Zapfenberechnungen, auf die Profilbestimmung für Körper von überall gleicher Biegungsfestigkeit, z. B. auf die Kernkörper der Balanciers, Krummzapfen, Flügelachsen, Konsolen und dgl., auf die Formengebung der Haken, auf die Querschnitte gleicher Festigkeit für Gufseisen und anderes Material, bei dem die Tragmoduln für Zug und Druck verschieden sind. Auch hinsichtlich der Strebfestigkeit treten Profilbestimmungen entsprechender Art auf. Dies alles findet sich in den besseren Lehrbüchern über Festigkeit und Elasticität.

Es empfiehlt sich, für die gebräuchlichsten Querschnitte eine Tabelle anzufertigen, in der für jeden der Flächeninhalt, die Schwerpunktslage, das Trägheitsmoment, das Widerstandsmoment u. s. w. anzugeben sind. Jede Formel ist dabei möglichst weit auszurechnen, so dafs z. B. in $\frac{4}{3\pi}r$, $\frac{\pi}{32}d^4$, $\frac{11+8\sqrt{2}}{12}b^4$ die Faktoren von r, d^4 und b^4 durch die entsprechenden Zahlen ersetzt werden. Dabei genügt eine Genauigkeit auf drei Stellen für das praktische Bedürfnis vollkommen.

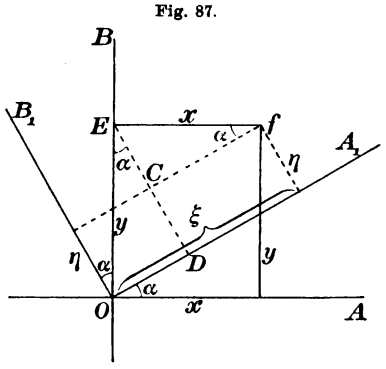
Reiches Übungsmaterial nebst Resultaten findet man in den Katalogen der Hüttenwerke und in den Tabellen einiger Lehrbücher der Festigkeitslehre.

Abschnitt IV.

Centrifugalmomente und Trägheitsmomente für beliebige Achsen.

109) In den vorigen Abschnitten wurden die Trägheitsmomente in Bezug auf besonders bequem liegende Achsen, meist Symmetrieachsen, berechnet. Gewisse Aufgaben der Festigkeitslehre und der Dynamik beanspruchen aber ihre Kenntnis für ganz beliebig liegende Achsen. Der Fall der Parallelverschiebung ist schon in Nr. 27) abgethan. Es fragt sich, welche Änderungen eintreten, wenn man die Achse um irgend einen Punkt dreht. Auf was es dabei ankommt, das ergiebt sich aus folgender Aufgabe: Die Trägheitsmomente einer Fläche in Bezug auf zwei aufeinander senkrechte Achsen OA und OB seien bekannt; wie grofs ist ihr Trägheitsmoment in Bezug auf eine Achse OA_1, die mit OA den Winkel α bildet?

Fig. 87.



Auflösung. $T_x = \sum fy^2$ und $T_y = \sum fx^2$ seien die bekannten auf OA und OB bezogenen Trägheitsmomente einer gegebenen Fläche. In Figur 87 ist ein Flächenteilchen f dargestellt, dessen Entfernungen von diesen Achsen y und x sein mögen, während es von den neuen Achsen OA_1 und OB_1 die Entfernungen η und ξ hat. Dann ist

$$\eta = DE - CE = y\cos\alpha - x\sin\alpha,$$

folglich

$$\eta^2 = y^2\cos^2\alpha + x^2\sin^2\alpha - 2xy\sin\alpha\cos\alpha$$

oder auch

$$\eta^2 = y^2\cos^2\alpha + x^2\sin^2\alpha - xy\sin 2\alpha.$$

Folglich ist das Trägheitsmoment des Teilchens f in Bezug auf OA_1

$$f\eta^2 = \cos^2\alpha\, fy^2 + \sin^2\alpha\, fx^2 - \sin 2\alpha\, fxy,$$

und das gesuchte Trägheitsmoment der Gesamtfläche

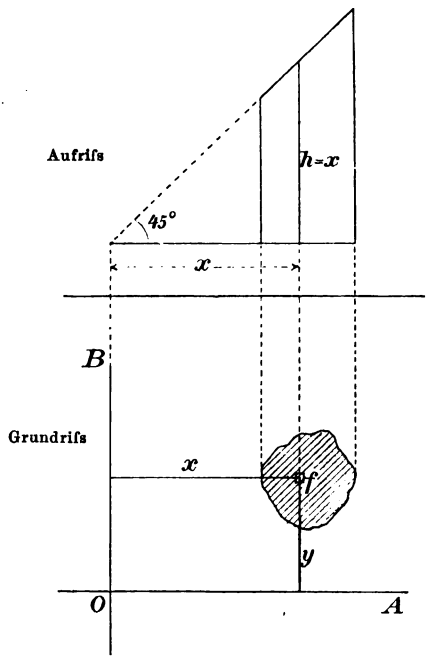
$$T_\xi = \sum f\eta^2 = \cos^2\alpha \sum fy^2 + \sin^2\alpha \sum fx^2 - \sin 2\alpha \sum fxy.$$

Bezeichnet man den Ausdruck $\sum fxy$ mit M_{xy}, so hat man die Gleichung

$$T_\xi = \cos^2\alpha\, T_x + \sin^2\alpha\, T_y - \sin 2\alpha\, M_{xy}.$$

Der Ausdruck M_{xy} wird aus später anzugebenden Gründen der Dynamik als das Centrifugalmoment oder auch als das Deviationsmoment der gegebenen Fläche in Bezug auf die X-Achse und Y-Achse bezeichnet. Kann man ihn für eine gegebene Fläche berechnen, so ist die oben gestellte Aufgabe gelöst. Es wird sich aber zeigen, dafs durch die Kenntnis der Centrifugalmomente noch eine ganze Reihe anderer Aufgaben lösbar wird, so dafs es sich der Mühe verlohnt, sie genauer zu untersuchen.

Fig. 88.



110) Veranschaulichung des Centrifugalmomentes einer Fläche.

In Figur 88 ist eine Fläche F als Grundrifs gezeichnet und auf ein Koordinatensystem OA und OB bezogen, so dafs z. B. das Teilchen f von beiden Achsen die Entfernungen x und y hat. Nach Obigem handelt es sich darum, für den Ausdruck fxy eine Deutung zu finden.

Man denke sich über jedem Flächenteilchen f eine Säule von der Höhe x, also vom Inhalte fx errichtet, dann ist ihr statisches Moment in Bezug auf die Achse OA gleich fxy. Diese sämtlichen Säulen bilden aber einen senkrechten Cylinder (bezw. ein Prisma) über der Fläche, der durch eine durch OB gehende und unter 45° geneigte Ebene schräg abgeschnitten ist. Dieser ist im Aufrifs dargestellt.

Die Summe aller Ausdrücke fxy bedeutet also das statische Moment des über der Fläche F stehenden und so abgeschrägten Cylinders in Bezug auf die Achse OA. Dies ist zugleich die Veranschaulichung des Centrifugalmomentes der Fläche F in Bezug auf die beiden Achsen.

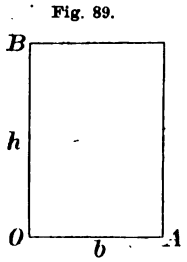
Statt dessen hätte man über jedem Teilchen f auch eine Säule von der Höhe y errichten und das statische Moment in Bezug auf die Achse OB bilden können. Dies hätte ebenfalls fxy gegeben. Schrägt man also den über F stehenden Körper durch eine Ebene ab, die unter der Neigung 45^0 durch OA geht und sucht man das statische Moment in Bezug auf OB, so findet man dasselbe Centrifugalmoment wie vorher.

Gerade wegen dieser Symmetrie gegen x und y, die in ihrer Bedeutung vertauscht werden dürfen, empfiehlt sich für das Centrifugalmoment die Bezeichnung M_{xy}.

Macht die Berechnung für die eine Auffassung Schwierigkeiten, so versuche man es mit der andern. Einige Beispiele werden dies näher erläutern.

111) **Aufgabe.** Das Centrifugalmoment des Rechtecks in Bezug auf dessen Seiten b und h zu bestimmen.

Fig. 89.



Auflösung. Geht die abschrägende Fläche durch h, so ist der Inhalt des Körpers

$$J = (bh)\frac{b}{2} = \frac{b^2h}{2}.$$

Das statische Moment in Bezug auf b ist dann

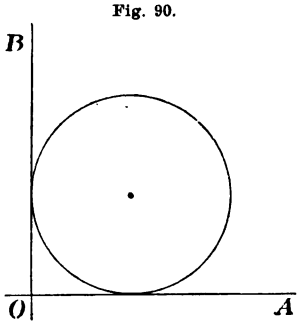
$$J\frac{h}{2} = \frac{b^2h}{2}\cdot\frac{h}{2} = \frac{b^2h^2}{4}.$$

Der Wert

$$M_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$$

ergiebt sich auch bei der andern Auffassung, wo die Abschrägung durch b gewählt ist.

Fig. 90.



112) **Aufgabe.** Das Centrifugalmoment der Kreisfläche in Bezug auf zwei einen rechten Winkel bildende Tangenten zu bestimmen.

Auflösung. Der Inhalt des Schrägkörpers wird bei beiden Auffassungen $(r^2\pi)r = r^3\pi$. Der Schwerpunktsabstand von der Momentachse ist r, also wird $M_{xy} = r^3\pi \cdot r = r^4\pi = \frac{d^4\pi}{16}$.

113) Anwendung des Centrifugalmomentes auf die Schwerpunktsbestimmung abgeschrägter Körper.

Über einer Fläche F stehe eine senkrechte Säule, die durch eine Ebene von zunächst 45^0 Neigung abgeschrägt werde. Nach Nr. 21) ist ihr Inhalt J gleich dem statischen Momente M_y in Bezug auf die Schnittlinie OB der Schrägebene mit der Grundfläche, und die Schwerpunktsprojektion des Körpers hat nach Nr. 48) von OB die Entfernung

$$x_s = \frac{T_y}{M_y} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}},$$

wobei beide Momente auf OB bezogen sind.

Die andere Koordinate y_s wird mit Hülfe des Centrifugalmomentes berechnet, wenn man dieses selbständig ermitteln kann. Das statische Moment des Körpers in Bezug auf OA ist nämlich nach Nr. 110)

$$y_s \cdot J = M_{xy},$$

also erhält man

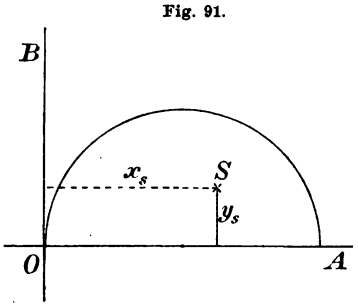
$$y_s = \frac{M_{xy}}{J} = \frac{M_{xy}}{M_y} = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Die Koordinaten y_s und x_s verhalten sich also wie das Centrifugalmoment zum Trägheitsmoment.

In dem genannten Punkte ist auf der Grundfläche F ein Lot bis zur Abschrägungsfläche zu errichten, dessen Höhe gleich x_s wird. In der halben Höhe befindet sich der Körperschwerpunkt.

Ist die Neigung der schrägen Schnittebene nicht 45^0, sondern eine beliebige, so bleiben die Koordinaten für die Projektion des Schwerpunktes dieselben. Die Höhe des zugehörigen Lotes wird $x_s \cdot \text{tang } \alpha$. Im Halbierungspunkte desselben befindet sich der Körperschwerpunkt.

Fig. 91.



Damit ist zugleich die Lage der Resultante des seitlichen Wasserdrucks gegen beliebig gestaltete ebene Flächen vollständig bestimmt.

114) **Aufgabe.** Über einem Halbkreise mit dem Durchmesser OA stehe ein abgeschrägter Körper, dessen Schnittebene durch die Tangente OB geht. Der Schwerpunkt des Körpers soll bestimmt werden.

Auflösung. Die Koordinate x_s für die Projektion des Körperschwerpunktes wird

$$x_s = \frac{T_y}{J} = \frac{T_y}{M_y} = \frac{\frac{r^4\pi}{8} + r^2 \cdot \frac{r^2\pi}{2}}{\frac{r^2\pi}{2} \cdot r} = \frac{5}{4} r.$$

Dagegen wird

$$y_s = \frac{M_{xy}}{J} = \frac{M_{xy}}{M_y}.$$

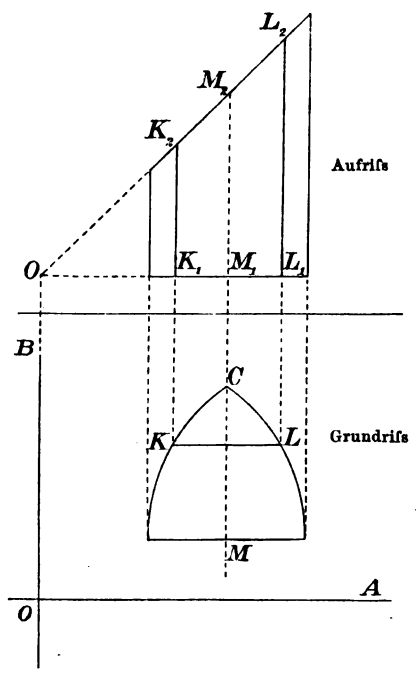
Hier handelt es sich um einen Fall, wo das Centrifugalmoment aus Symmetriegründen besser mit Hülfe der andern Abschrägung berechnet wird. Der Inhalt des neuen Körpers wird bei 45° Neigung der Schrägfläche nach Nr. 21) $J = \frac{r^2\pi}{2} \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{2}{3} r^3$, der Hebelarm für das statische Moment in Bezug auf OB ist r, also ist $M_{xy} = \frac{2}{3} r^4$. So folgt schliefslich für den zuerst betrachteten Körper

$$y^s = \frac{\frac{2}{3} r^4}{\frac{r^3\pi}{2}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Das an der Stelle x_s, y_s errichtete Lot hat die Höhe $\frac{5}{4} r$. In der halben Höhe, d. h. in der Höhe $\frac{5}{8} r$, befindet sich der Körperschwerpunkt. Bei anderer Neigung ist mit tang α zu multiplizieren.

Der Abstand y_s entspricht dem des Schwerpunktes der Kreisfläche von OA. Es fragt sich, ob dies in allen Symmetriefällen stattfindet; wie sich sofort zeigen wird, ist diese Frage zu bejahen.

Fig. 92.

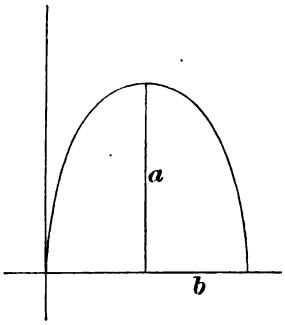


115) Der Fall der symmetrischen Fläche. Die im Grundriſs gezeichnete Fläche F sei symmetrisch gegen CM. Jeder Schnitt wie KL erscheint dann im Aufriſs als Trapez $K_1L_1L_2K_2$ mit der Mittellinie M_1M_2. Das Moment dieses Schnittes in Bezug auf OA ist also ebenso groſs, als ob über KL ein Rechteck von der Höhe M_1M_2 stände. Dies gilt für jeden der zu KL parallelen Schnitte, folglich ist das statische Moment des abgeschrägten Körpers in Bezug

auf OA ebenso grofs, als das der Säule von überall gleicher Höhe M_1M_2. Folglich liegt die Schwerpunktsprojektion für den abgeschrägten Körper in derselben Entfernung y_s, wie bei der gewöhnlichen Säule, d. h. in der Schwerpunktsentfernung der Grundfläche. Dagegen hat x_s für beide Fälle verschiedene Lagen.

Im Falle der Symmetrie ist demnach das Centrifugalmoment besonders leicht zu berechnen. Man multipliziert den Inhalt des über F stehenden Körpers, der durch eine Ebene abgeschrägt ist, die selbst durch eine zur Symmetrieachse Parallele OB geht, mit dem Schwerpunktsabstande der Fläche von der zweiten Achse, so dafs

Fig. 93.



$$M_{xy} = y_s J = y_s M_y$$

ist.

So erhält man z. B. für die vorige Halbkreisaufgabe sofort $M_{xy} = \frac{4r}{3\pi} \cdot \frac{r^2\pi}{2} = \frac{2}{3} r^4$ ohne Benutzung der zweiten Abschrägung.

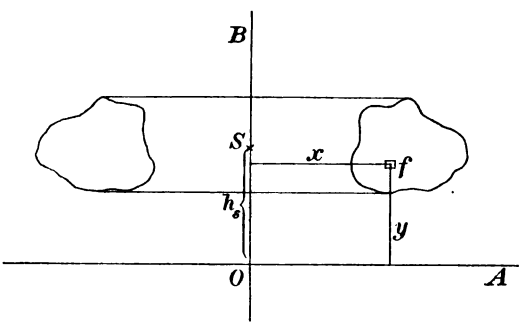
Ebenso folgt für die nebenstehende Halbellipse

$$M_{xy} = \frac{4a}{3\pi} \frac{ab\pi}{2} \cdot b = \frac{2}{3} a^2b^2.$$

Aus den Anwendungen auf abgeschrägte Körper folgen auch solche, die sich auf Drehungskörper beziehen.

116) **Aufgabe.** Wie hoch liegt der Schwerpunkt eines Guldinschen Drehungskörpers?

Fig. 94.



Auflösung. Das Flächenteilchen f giebt bei der Drehung den Inhalt $2\pi fx$, sein statisches Moment in Bezug auf die durch OA dargestellte Grundebene ist also $2\pi fxy$, das statische Moment des Gesamtkörpers in Bezug auf die Grundebene wird also gleich $2\pi \sum fxy$ oder $2\pi M_{xy}$.

Bezeichnet man die Schwerpunktshöhe mit h_s, so erhält man

$$h_s \cdot J = 2\pi M_{xy}.$$

Da nach Guldin $J = 2\varrho\pi F = 2\pi M_y$ ist, wo M_y das statische Moment der Fläche in Bezug auf die Achse OB bedeutet, so wird

$$h_s = \frac{2\pi M_{xy}}{2\pi M_y} = \frac{M_{xy}}{M_y} = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

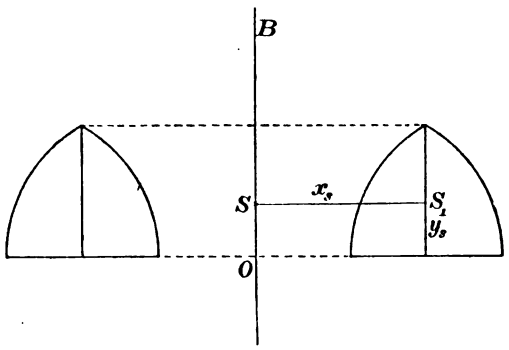
Ebenso hoch liegt der Schwerpunkt für jeden Sektor eines solchen Körpers.

Ist der Sektorwinkel unendlich klein, so kann man den Sektor als abgeschrägten Körper im obigen Sinne betrachten. Darin liegt die Übereinstimmung der Resultate, die sich auch auf den Symmetriefall ausdehnen lassen.

117) Der Drehungskörper im Symmetriefalle.

Ist die Fläche symmetrisch gegen eine zur Drehungsachse parallele Gerade, so liegt der Schwerpunkt des Drehungskörpers ebenso hoch, wie der der erzeugenden Fläche. Der Beweis ergiebt sich aus Obigem.

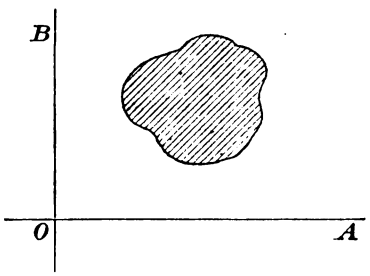
Fig. 95.



Hier findet also ein ähnliches Ausgleichen statt, wie vorher bei den Trapezflächen. (Dafs bei unsymmetrischen Flächen der Satz nicht mehr gilt, sieht man z. B. am geraden Kreiskegel, dessen Schwerpunktshöhe $h_s = \frac{h}{4}$ ist, während die der Fläche $h_s' = \frac{h}{3}$ ist.)

118) Deutungen des Centrifugalmomentes mit Hülfe der Dichtigkeit oder des spezifischen Gewichtes.

Fig. 96.

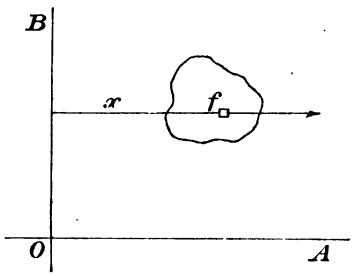


a) Statt über der Fläche F einen abgeschrägten Körper zu errichten, kann man eine Massenbelegung annehmen, deren Dichtigkeit in jedem Punkte z. B. proportional dem Abstande x von OB ist. Setzt man die Dichtigkeit gleich x selbst, so ist das statische Moment der so belegten Fläche in Bezug auf die Achse OA gleich $\sum fxy = M_{xy}$. Dabei kann man die Achsen in ihrer Bedeutung mit einander vertauschen.

b) Statt dessen kann man den mittels OB abgeschrägten Körper beibehalten, aber seine Dichtigkeit proportional zu y setzen. Setzt man sie gleich y, so wird der Masseninhalt des Körpers gleich $\sum fxy = M_{xy}$.

119) Anwendung auf die Centrifugalkraft ebener Flächen. Man denke sich eine ebene Fläche homogen mit Masse belegt und um eine Achse OB ihrer Ebene gedreht. Jedes Teilchen f im Abstande x von der Drehungsachse erhält dann eine Centrifugalkraft $fx\vartheta^2$, wo ϑ die auf den Radius 1 reducierte Winkelgeschwindigkeit ist.

Fig. 97.



Die gesamte Centrifugalkraft ist dann $\vartheta^2 \sum fx = \vartheta^2 M_y$, d. h. ebenso grofs, als ob die gesamte Masse F im Flächenschwerpunkte vereinigt wäre.

Der Angriffspunkt der Centrifugalkraft fällt aber nicht mit dem Flächenschwerpunkte zusammen. Um ihn zu finden, errichte man auf der Fläche Lote gleich der Centrifugalkraft im entsprechenden Punkte. Dies giebt einen Diagrammkörper, der in obigem Sinne abgeschrägt ist. Die Projektion seines Schwerpunktes auf die Fläche F giebt den Angriffspunkt der Centrifugalkraft. Seine Koordinaten ergeben sich nach Nr. 113) aus

$$x_s = \frac{T_y}{M_y}, \quad y_s = \frac{M_{xy}}{M_y}.$$

Ist die Fläche symmetrisch in Bezug auf eine zu OB parallele Gerade, so stimmt y_s mit dem Schwerpunktsabstande der Fläche überein, so dafs dann die Richtungslinie der Centrifugalkraft durch den Flächenschwerpunkt geht, was durchaus nicht allgemein der Fall ist.

Das Moment der Centrifugalkraft in Bezug auf die Punkte der Achse OA ist in jedem Augenblicke gleich

$$\vartheta^2 \sum fxy = \vartheta^2 M_{xy},$$

für den Sonderfall $\vartheta = 1$ geht dies in M_{xy} selbst über.

Es handelt sich in der That bei M_{xy} um ein bestimmtes Moment der Centrifugalkraft, so dafs der Name Centrifugalmoment sehr bezeichnend ist.

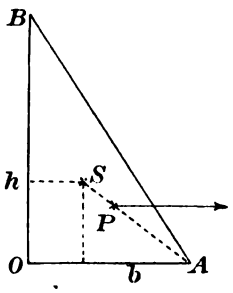
Ist die Achse OB nicht fest und keine freiwillige Drehungsachse, so würde die Centrifugalkraft ein Umstürzen, also eine Abweichung

von der ursprünglichen Drehungsbewegung erstreben, so dafs auch der Name Deviationsmoment brauchbar erscheint.

120) Beispiel des Dreiecks.

Ein Dreieck drehe sich um die Achse OB. Wie grofs ist die entstehende Centrifugalkraft, und wo greift sie an?

Fig. 98.



a) Geometrische Behandlung. Man denke sich auf der Fläche Lote errichtet, die gleich den einzelnen Centrifugalkräften $fx\vartheta^2$, also proportional zum Abstande x sind. Der entstehende Diagrammkörper ist eine Pyramide, deren senkrechte Höhe im Punkte A zu denken ist. Ihr Schwerpunkt wird gefunden, indem man den Flächenschwerpunkt S mit der über A schwebenden Spitze verbindet und von der Verbindungslinie den vierten Teil abschneidet. P ist dann die Projektion des Schwerpunktes und zugleich der gesuchte Angriffspunkt der Centrifugalkraft. Die Koordinaten von P sind

$$x_s = \frac{b}{3} + \frac{1}{4}\frac{2}{3}b = \frac{b}{3} + \frac{b}{6} = \frac{b}{2}; \quad y_s = \frac{h}{3} - \frac{1}{4}\frac{h}{3} = \frac{h}{4}.$$

In S hat man sich die Masse vereinigt zu denken, um die Centrifugalkraft $m\frac{b}{3}\vartheta^2$ zu finden. Da aber die Fläche des Dreiecks als Masse betrachtet werden kann, so folgt $m = \frac{bh}{2}$, und man erhält als Centrifugalkraft

$$p = \frac{bh}{2}\frac{b}{3}\vartheta^2 = \frac{hb^2\vartheta^2}{6}.$$

So wird S benutzt, um die Gröfse der Centrifugalkraft zu finden. Ihr Angriffspunkt aber hat ganz andere Koordinaten als S.

b) Behandlung mit Hülfe des Trägheits- und Centrifugalmoments.

$$x_s = \frac{T_y}{M_y} = \frac{\frac{hb^3}{12}}{\frac{bh}{2}\cdot\frac{b}{3}} = \frac{b}{2}; \quad y_s = \frac{M_{xy}}{M_y} = \frac{\frac{b^2h^2}{24}}{\frac{hb^2}{6}} = \frac{h}{4}.$$

Die Kraft wird ebenso berechnet wie vorher.

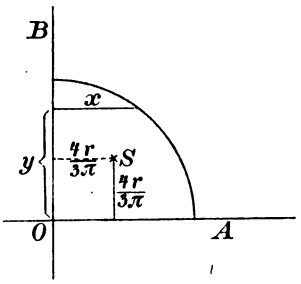
121) Beispiel des Viertelkreises, der sich um OB dreht.

Gemischte Behandlung. Der mittels OB abgeschrägte Körper hat den Inhalt

$$J = \frac{r^2\pi}{4}\cdot\frac{4r}{3\pi} = \frac{r^3}{3}.$$

(Ebenso groſs ist das statische Moment M_y der Fläche.) Seine Schwerpunktsprojektion hat die Koordinaten

Fig. 99.



$$x_s = \frac{T_y}{M_y} = \frac{\frac{r^4\pi}{16}}{\frac{r^3}{3}} = \frac{3\pi}{16} r \quad \text{und} \quad y_s = \frac{M_{xy}}{M_y} = ?$$

Hier versagen zunächst die bisherigen Methoden zur Berechnung von M_{xy}. Der Diagrammkörper der Centrifugalkraft (bei der Drehung um OB) ist aber ein Sektor der Halbkugel, dessen Schwerpunkt mit dem der letzteren in derselben Höhe $y_s = \frac{3}{8} r$ liegen muſs. (Vgl. Method. Lehrbuch, II, Stereom. 56.) So findet man zugleich $M_{xy} = y_s M_y = \frac{3}{8} r \cdot \frac{r^3}{3} = \frac{r^4}{8}$. Dasselbe Resultat giebt die später zu behandelnde Summenformel. Über jedem Schnitte x ist nämlich ein Dreieck vom Inhalte $x \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}$ zu denken, dessen statisches Moment in Bezug auf OA gleich $\frac{x^2}{2} y$ ist. Dafür kann man schreiben

$$\frac{r^2 - y^2}{2} y = \frac{r^2}{2} y - \frac{y^3}{2}.$$

Nach der Summenformel ist dann das Moment von $y = 0$ bis $y = y_1$ gleich

$$\frac{r^2}{2} \frac{y_1^2}{2} - \frac{y_1^4}{2 \cdot 4} = \frac{y_1^2}{8} \left(2r^2 - y_1^2\right).$$

Für $y_1 = r$ wird dies

$$\frac{r_1^2}{8} (2r^2 - r^2) = \frac{r^4}{8} = M_{xy}.$$

Folglich ist

$$y_s = \frac{M_{xy}}{M_y} = \frac{\frac{r^4}{8}}{\frac{r^3}{3}} = \frac{3}{8} r.$$

Wiederum haben die Koordinaten des Angriffspunktes nichts mit dem Flächenschwerpunkte S zu thun. Letzterer giebt als Gröfse der Centrifugalkraft

$$m \varrho \vartheta^2 = \frac{r^2\pi}{4} \cdot \frac{4r}{3\pi} \vartheta^2 = M_y \vartheta^2 = \frac{r^3}{3} \vartheta^2.$$

Zugleich hat man gesehen, daſs im allgemeinen Rechnungsmethoden zur Anwendung kommen müssen, wie sie später behandelt werden sollen.

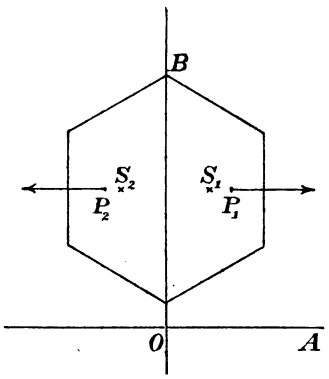
Ein wirklicher Einblick in die Lehre von der Centrifugalkraft ist nur möglich auf Grund der Kenntnis der

Trägheits- und Centrifugalmomente, die uns die Koordinaten der Angriffspunkte geben. —

122) Fälle, in denen das Centrifugalmoment gleich Null oder gleich einer Konstanten wird.

Die allgemeine Bekanntschaft mit mechanischen Vorgängen läfst es bequem erscheinen, an der Hand der Centrifugalkraft ebener drehender Flächen einige besondere Fälle zu betrachten.

Fig. 100.

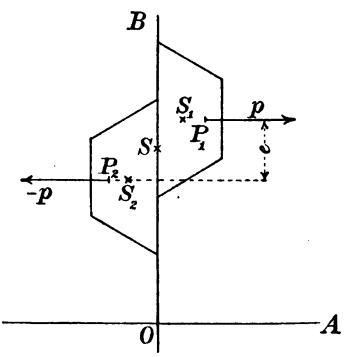


a) Hat die Fläche eine Symmetrieachse, und betrachtet man diese als Drehungsachse, so heben sich die Centrifugalkräfte je zweier symmetrischer Teilchen gegenseitig auf. Die Centrifugalkraft und ebenso das Centrifugalmoment wird gleich Null. Also:

Das Centrifugalmoment einer Fläche in Bezug auf eine Symmetrieachse und eine zu ihr Senkrechte ist stets gleich Null.

b) Denkt man sich die beiden symmetrischen Teile gegeneinander verschoben, wie in Figur 101, so ist die Summe der Centrifugalkräfte zwar noch immer gleich Null, da aber die Resultanten nicht in dieselbe Linie fallen, so entsteht ein Kräftepaar (Drehungspaar). Das Moment der Centrifugalkraft wird, wenn jede der Resultanten gleich p und ihre gegenseitige senkrechte Entfernung gleich e ist, in Bezug auf jeden Punkt der Achse OB gleich pe. Dabei ist es durchaus nicht nötig, dafs die beiden gegeneinander verschobenen Teile ursprünglich symmetrisch waren, wenn nur die Achse durch den Schwerpunkt geht. Folglich:

Fig. 101.



Das Centrifugalmoment einer ebenen Fläche in Bezug auf eine Schwerpunktsachse und jede Normale der letzteren hat einen konstanten Wert. Beide Achsen sind dabei in der Ebene der Fläche zu denken.

c) Fälle, in denen das Centrifugalmoment gleich Null wird, kann man sich leicht konstruieren. So kann man z. B. Fig. 102 so einrichten, dafs die vier einzelnen Centrifugalkräfte im Gleichgewichte

stehen, d. h. dafs das Moment des Kräftepaares der Centrifugalkräfte gleich Null wird.

d) Es giebt rechtsdrehende und linksdrehende Kräftepaare. Fafst man das Moment der ersteren als positiv auf, so ist das der letzteren negativ. Demnach kann auch das Centrifugalmoment einer Fläche in Bezug auf zwei Achsen negativ sein. Man hat dann nur nötig, die eine Achse als entgegengesetzt gerichtet aufzufassen, um ein positives Moment zu erhalten.

Fig. 102.

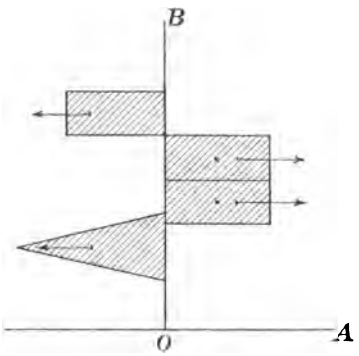
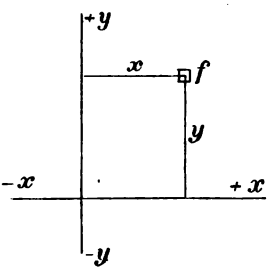


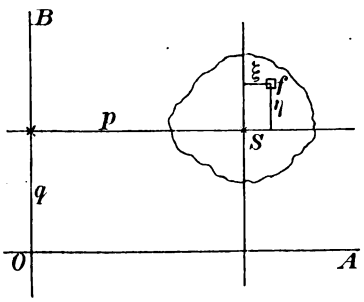
Fig. 103.



Liegt ein Flächenteilchen im ersten oder dritten Quadranten, so ist sein Centrifugalmoment positiv. Liegt es im zweiten oder vierten, so ist es negativ. Ebenso ist es bei der gesamten Fläche leicht zu entscheiden, ob in Bezug auf die Koordinatenachsen ihr Moment positiv oder negativ ist.

Aus diesen Betrachtungen mechanischer Art lassen sich Sätze über Centrifugalmomente und abgeschrägte Körper ableiten. Bei letzteren ist der über der Grundrifsebene liegende Teil als positiv, der andere als negativ aufzufassen.

Fig. 104.



Der unter b) angedeutete Satz ist ein Sonderfall eines allgemeineren Verschiebungssatzes, der sich folgendermafsen ergiebt.

123) Vierschiebungssatz für das Centrifugalmoment.

Das Centrifugalmoment für zwei aufeinander senkrechte Schwerpunktsachsen einer Fläche sei bekannt. Man suche das Centrifugalmoment für zwei parallele Achsen OA und OB, wobei O in Bezug auf S die Koordinaten $-p$, $-q$ habe. Waren die ursprünglichen Koordinaten eines Flächenteilchens f durch ξ und η

gegeben, so sind die neuen Koordinaten $x = p + \xi$, $y = q + \eta$, und das Produkt xy wird gleich $(p + \xi)(q + \eta) = pq + \xi\eta + p\eta + q\xi$, so dafs

$$\sum fxy = pq\sum f + \sum f\xi\eta + p\sum f\eta + q\sum f\xi$$

wird. Der erste Posten giebt pqF, der zweite ist das ursprüngliche Centrifugalmoment $M_{\xi\eta}$, der dritte wird Null, da es sich um das statische Moment in Bezug auf eine Schwerpunktsachse handelt. Ebenso verschwindet der letzte Posten. Man hat also

$$M_{xy} = M_{\xi\eta} + pqF.$$

Folglich: Bei der durch $x = \xi + p$ und $y = \eta + q$ bestimmten Parallelverschiebung der Achsen aus der Schwerpunktslage wächst das ursprüngliche Centrifugalmoment um das Produkt aus der Fläche F und dem Verschiebungsrechteck pq.

Haben p und q gleiche Zeichen, so ist der Zuwachs positiv, haben sie verschiedene Zeichen, so ist er negativ. Ist p oder q gleich Null, d. h. verschiebt sich nur die eine der Schwerpunktsachsen, so ist der Zuwachs gleich Null, und das Centrifugalmoment bleibt unverändert. War das ursprüngliche Centrifugalmoment gleich Null, was bei Symmetrieachsen stets der Fall ist, so ist

$$M_{xy} = pqF,$$

was bequem ausgewertet werden kann. (Später wird sich zeigen, dafs dies bei jeder Mittelpunktsachse regelmäfsiger Flächen der Fall ist.)

Die Fälle, in denen das Centrifugalmoment gleich Null ist, sind von besonderer Wichtigkeit für die Berechnung von Trägheitsmomenten für beliebige Achsen, denn die in Nr. 109) abgeleitete Gleichung

$$T_\xi = \cos^2\alpha\, T_x + \sin^2\alpha\, T_y - \sin 2\alpha\, M_{xy}$$

geht dann über in die einfachere Form

$$T_\xi = \cos^2\alpha\, T_x + \sin^2\alpha\, T_y.$$

124) Der Trägheitsradius.

Für das Rechteck war in Bezug auf die Seite b das Trägheitsmoment $T = \frac{bh^3}{3}$. Man kann fragen, in welcher Entfernung von b man sich die gesamte Fläche (Masse) concentriert denken müsse, damit das Trägheitsmoment dasselbe sei. Man erreicht dies, indem man $F\varrho^2 = T$, also hier $bh\varrho^2 = \frac{bh^3}{3}$ setzt. Für das Rechteck folgt

daraus $\varrho^2 = \frac{h^2}{3}$, oder $\varrho = \frac{h}{\sqrt{3}}$. Allgemein erhält man für jede beliebige Fläche

$$\varrho = \sqrt{\frac{T}{F}}.$$

Für die Mittellinie des Rechtecks erhält man

$$\varrho = \sqrt{\frac{T}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{bh^3}{12}}{bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{h}{6}\sqrt{3}.$$

Beim Kreise ergiebt sich in Bezug auf den Durchmesser

$$\varrho = \sqrt{\frac{T}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{r^4\pi}{4}}{r^2\pi}} = \frac{r}{2}.$$

Den so bestimmten Radius nennt man den Radius des Trägheitsmomentes oder kurz den Trägheitsradius.

Entsprechende Betrachtungen kann man für das polare Trägheitsmoment anstellen, wo sich ergiebt

$$\varrho = \sqrt{\frac{T_p}{F}}.$$

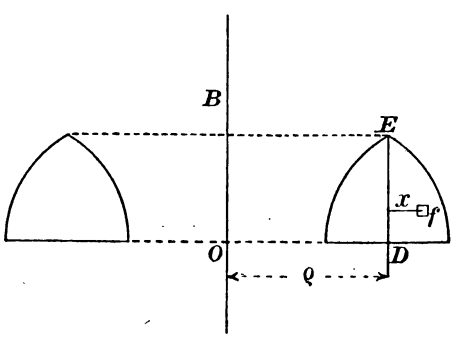
So ist z. B. für die Kreisfläche

$$\varrho = \sqrt{\frac{\frac{r^4\pi}{2}}{r^2\pi}} = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r}{2}\sqrt{2}.$$

Der Trägheitsradius dient zur Vereinfachung von Rechnungen und Formeln.

Ein Beispiel für seine Verwendung bietet die folgende Aufgabe.

Fig. 105.



125) **Aufgabe.** Ein ringförmiger Körper entstehe durch Drehung einer symmetrischen Fläche um eine zur Symmetrieachse parallele Gerade. Wie grofs ist das Trägheitsmoment des Drehungskörpers in Bezug auf diese Achse?

Auflösung. Jedes Flächenteilchen f in der Entfernung $\varrho + x$ von der Achse OB giebt nach Guldin einen Ring vom Inhalte $2(\varrho + x)\pi f$. Ist m die Masse dieses Ringes, so ist sein Trägheitsmoment in Bezug auf OB gleich

$m(\varrho + x)^2$, also ist, da die Masse m mathematisch genommen mit dem Inhalte übereinstimmt, das Trägheitsmoment gleich

$$2(\varrho + x)\pi f(\varrho + x)^2 = 2\pi f(\varrho + x)^3$$

oder gleich

$$2\pi f(\varrho^3 + 3\varrho^2 x + 3\varrho x^2 + x^3).$$

Aus Symmetriegründen gehört zu jedem Teilchen f in der Entfernung $\varrho + x$ ein entsprechendes in der Entfernung $\varrho - x$, und für dieses ergiebt sich ebenso ein Partialring vom Trägheitsmomente

$$2\pi f(\varrho^3 - 3\varrho^2 x + 3\varrho x^2 - x^3).$$

Beide Partialringe zusammen haben also das Trägheitsmoment

$$2\pi f(2\varrho^3 + 6\varrho^2 x^2).$$

Für das gesamte Trägheitsmoment

$$T = \sum 2\pi f\varrho^3 + \sum 6\pi f\varrho^2 x + \sum 6\pi f\varrho x^2 + \sum 2\pi f x^3$$

folgt daraus, dafs Glieder mit ungeraden Potenzen von x wegfallen und nur die mit geraden Potenzen stehen bleiben. Demnach wird

$$T = 2\pi\varrho^3 \sum f + 6\pi\varrho \sum f x^2.$$

Hier bedeutet $\sum f$ die Fläche F und $\sum f x^2$ ihr Trägheitsmoment T_1 in Bezug auf die Symmetrieachse. Führt man den Trägheitsradius ϱ_1 dieser Fläche mit Hülfe der Gleichung $\varrho_1^2 F = T_1$ ein, so folgt

$$T = 2\pi\varrho F\varrho^2 + 6\pi\varrho F\varrho_1^2,$$

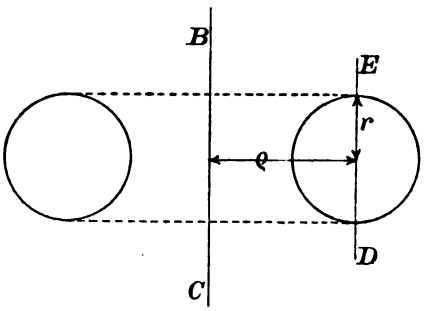
oder, da $2\pi\varrho F = J$ ist,

$$\boldsymbol{T = J(\varrho^2 + 3\varrho_1^2).}$$

In Worten läfst sich der Satz ausdrücken:

Entsteht ein Ringkörper durch Drehung einer symmetrischen Fläche um eine zur Symmetrielinie parallele Achse, so ist das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehungsachse gleich $J(\varrho^2 + 3\varrho_1^2)$, wo J den Inhalt des Körpers, ϱ den Abstand der Symmetrielinie von der Achse, ϱ_1 den Trägheitsradius der Fläche in Bezug auf die Symmetrielinie bedeutet. Der Trägheitsradius des Körpers ist also gleich $\sqrt{\varrho^2 + 3\varrho_1^2}$.

Fig. 106.



126) Beispiel des Ringkörpers mit Kreisquerschnitt. Hier ist der Inhalt

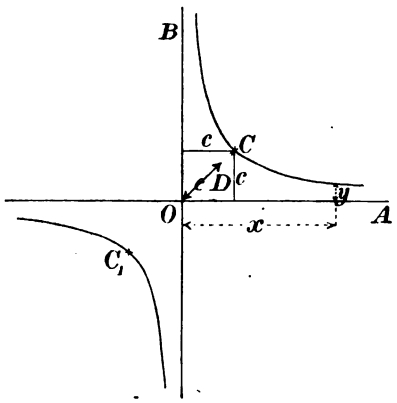
$$J = 2\varrho\pi r^2\pi = 2\varrho r^2\pi^2.$$

In Bezug auf DE ist für die Fläche des Kreises $T_1 = \frac{r^4\pi}{4}$, aus $\varrho_1^2 F = T_1$ oder $\varrho_1^2 \cdot r^2\pi = \frac{r^4\pi}{4}$ folgt $\varrho_1^2 = \frac{r^2}{4}$. Demnach wird das Trägheitsmoment des Körpers

$$T = J\left(\varrho^2 + 3\varrho_1^2\right) = 2\varrho r^2\pi^2\left(\varrho^2 + \frac{3r^2}{4}\right).$$

127) Der Radius des Centrifugalmomentes. Ebenso könnte man fragen, wo man sich die gesamte Fläche (Masse) vereinigt denken müsse, um in Bezug auf zwei Achsen OA und OB dasselbe Centrifugalmoment zu erhalten. Dann hätte man zu setzen

Fig. 107.



$$F \cdot x \cdot y = M_{xy},$$

oder

$$xy = \frac{M_{xy}}{F}.$$

Ist der Ausdruck rechts positiv, so sind im ersten und dritten Quadranten unendlich viele Stellen möglich, da zwei veränderliche Gröfsen x und y vorhanden sind. Die gesuchten Punkte liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel mit dem konstanten Rechteck $xy = \frac{M_{xy}}{F}$. Eins dieser Rechtecke ist ein Quadrat vom Inhalte

$$c^2 = \frac{M_{xy}}{F},$$

seine Seite ist

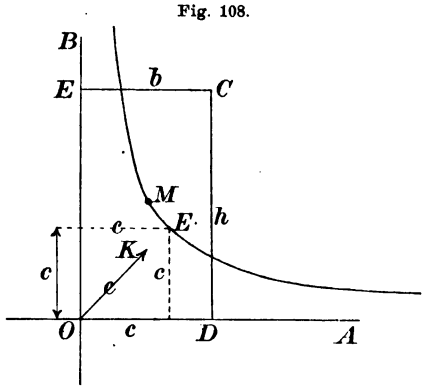
$$c = \sqrt{\frac{M_{xy}}{F}}.$$

Die Ecke C ist symmetrisch gegen beide Achsen und wird am bequemsten für die Anbringung der Masse F sein. Nur noch C_1 würde ebenso bequem liegen. Die positive Gröfse c bezeichnet man als den Radius

des Centrifugalmoments. Man pflegt zum Zwecke graphischer Darstellungen c als OD auf OC abzutragen, was ganz naturgemäfs der Symmetrie gegen die beiden Achsen entspricht.

Ist dagegen die rechte Seite von $xy = \frac{M_{xy}}{F}$ negativ, so würden die entsprechenden Punkte im zweiten und vierten Quadranten liegen, wobei es sich um ein Quadrat mit den Seiten $+c$ und $-c$ handeln würde. Da jetzt $c = \sqrt{\frac{M_{xy}}{F}}$ imaginär sein würde, könnte man von einem reellen Radius des Centrifugalmomentes nicht mehr reden. In solchen Fällen ist es besser, die positive Richtung z. B. der X-Achse entgegengesetzt anzunehmen und so das Imaginäre zu vermeiden. Hier sollen solche Fälle möglichst ausgeschieden werden. Die Darstellung beschränkt sich also auf zwei Quadranten.

Fig. 108.



128) Beispiel des Rechtecks.

In Bezug auf die Achsen OA und OB war

$$M_{xy} = \frac{b^2h^2}{4},$$

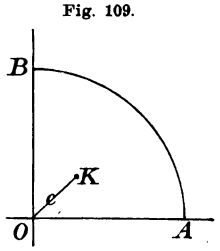
so dafs

$$c^2 = xy = \frac{M_{xy}}{F} = \frac{\frac{b^2h^2}{4}}{bh} = \frac{bh}{4} = \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2}$$

ist. Demnach geht die gleichseitige Hyperbel durch den Mittelpunkt M des Rechtecks, und c ist mittlere Proportionale zwischen $\frac{b}{2}$ und $\frac{h}{2}$. Auf der Winkelhalbierenden OE ist $OK = c$ abzutragen.

129) Beispiel des Viertelkreises.

Fig. 109.



Nach Nr. 121 ist in Bezug auf OA und OB

$$M_{xy} = \frac{r^4}{8}.$$

Es folgt

$$c^2 = xy = \frac{M_{xy}}{F} = \frac{\frac{r^4}{8}}{\frac{r^2\pi}{4}} = \frac{r^2}{2\pi},$$

also $c = \frac{r}{\sqrt{2\pi}}$ ist in O als Winkelhalbierende einzutragen.

130) Satz von der Trägheitsellipse.

In Abschnitt 109 war gezeigt worden, dafs man aus den Trägheitsmomenten T_x und T_y einer Fläche das Trägheitsmoment T_ξ für eine um α gegen OA gedrehte Achse mit Hülfe folgender Gleichung findet:

$$T_\xi = T_x \cos^2\alpha + T_y \sin^2\alpha - \sin 2\alpha\, M_{xy},$$

wo M_{xy} das Centrifugalmoment in Bezug auf die ursprünglichen Achsen ist. Führt man für T_ξ, T_x und T_y die Trägheitsradien ϱ, ϱ_1 und ϱ_2 ein, so hat man zu setzen $T_\xi = F\varrho^2$, $T_x = F\varrho_1^2$, $T_y = F\varrho_2^2$. Für das Centrifugalmoment werde der Radius c durch die Gleichung $M_{xy} = Fc^2$ eingesetzt. Dadurch geht die Gleichung über in

$$F\varrho^2 = F\varrho_1^2 \cos^2\alpha + F\varrho_2^2 \sin^2\alpha - Fc^2 \sin 2\alpha,$$

oder nach beiderseitiger Division durch F in

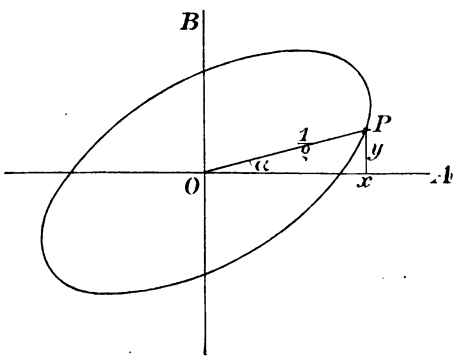
$$\varrho^2 = \varrho_1^2 \cos^2\alpha + \varrho_2^2 \sin^2\alpha - 2c^2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

Dafür kann man schreiben

$$1 = \frac{\left(\frac{\cos\alpha}{\varrho}\right)^2}{\left(\frac{1}{\varrho_1}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\sin\alpha}{\varrho}\right)^2}{\left(\frac{1}{\varrho_2}\right)^2} - \frac{2\,\frac{\sin\alpha}{\varrho}\,\frac{\cos\alpha}{\varrho}}{\left(\frac{1}{c}\right)^2}.$$

Diese Gleichung läfst sich geometrisch veranschaulichen. Man setze die veränderliche, von α abhängige Gröfse $\frac{\cos\alpha}{\varrho} = x$ und $\frac{\sin\alpha}{\varrho} = y$.

Fig. 110.



Dies sind dann die Koordinaten eines Punktes P, für den $OP = \frac{1}{\varrho}$ und $\sphericalangle POA = \alpha$ ist. Setzt man aufserdem die Konstanten $\frac{1}{\varrho_1} = a_1$ und $\frac{1}{\varrho_2} = b_1$, so geht die obige Gleichung über in

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - \frac{2xy}{\left(\frac{1}{c}\right)^2} = 1.$$

Bildet man also für jeden Winkel α den Trägheitsradius ϱ und seinen umgekehrten Werth $\frac{1}{\varrho}$, und trägt man den letzteren auf dem freien Schenkel von α ab, so bilden die Endpunkte P die durch die letzte Gleichung dargestellte Kurve.

Diese ist vom zweiten Grade, also Gleichung eines Kegelschnitts. Vertauscht man in der Gleichung $+ x$ mit $- x$ und zugleich $+ y$ mit $- y$, so ändert sie sich nicht, folglich ist sie eine Mittelpunktsgleichung, und O ist Mittelpunkt des Kegelschnitts. Da ferner das Trägheitsmoment der Fläche für keine durch O gehende Achse verschwinden kann (denn $\sum f\xi^2$ besteht aus lauter positiven Teilen), so kann $\frac{1}{\varrho}$ für keine durch O gehende Achse unendlich grofs werden. Der Kegelschnitt ist demnach eine Ellipse. Also:

Berechnet man die reciproken Werte der Trägheitsmomente einer Fläche F für sämtliche durch einen Punkt O gehenden Achsen, und trägt man diese Werte auf den Achsen ab, so bilden die Endpunkte eine Ellipse.

Diese ist die sogenannte Trägheitsellipse.

(Hätte man nicht die reciproken Werte, sondern die ϱ selbst abgetragen, so hätte man die reciproke Kurve der Ellipse, eine gewisse Kurve 4ten Grades erhalten, die der allgemeinen Anschauung weniger geläufig ist.)

Hat man die Hauptachsen dieser Ellipse, so kennt man alle ihre Durchmesser, folglich auch die reciproken Werthe der Trägheitsmomente für sämtliche Achsen, folglich auch die Trägheitsmomente selbst. Man hat also eine sehr einfache graphische Darstellung. Gleichzeitig aber lassen sich sofort zahlreiche wichtige Folgerungen ablesen.

131) **Folgerungen.**

a) Die Ellipse hat einen gröfsten und einen kleinsten Durchmesser, die auf einander senkrecht stehen. Dem ersteren entspricht das Minimum, dem letzteren das Maximum des Trägheitsmomentes. Die Minimal- und Maximalachse stehen also auf einander senkrecht.

Man bezeichnet beide als die Hauptträgheitsachsen der Fläche für den betreffenden Punkt O.

b) Je zwei Ellipsendurchmesser, die symmetrisch gegen die beiden Hauptachsen liegen, sind einander gleich. Folglich: Symmetrisch gegen die Hauptachsen liegenden Achsen entsprechen gleiche Trägheitsmomente.

c) Von den so zusammengehörigen Durchmesserpaaren bildet nur eines einen rechten Winkel, das den Winkel der Hauptachsen halbierende. Folglich: Sind die Trägheitsmomente in Bezug auf zwei durch O gehende und aufeinander senkrecht stehende Achsen einander gleich, so findet man durch Halbierung der Schnittwinkel der letzteren die Haupt-

trägheitsachsen. Der Kürze halber sollen die Achsen der gleichen Trägheitsmomente als Gleichheitsachsen bezeichnet werden.

d) Sind mehr als zwei Ellipsendurchmesser einander gleich, so ist die Ellipse ein Kreis. Folglich: Stimmen die Trägheitsmomente in Bezug auf mehr als zwei durch O gehende Achsen überein, so stimmen sie für sämtliche überein. (Später wird sich zeigen, dafs für jede beliebig gestaltete ebene Fläche zwei Punkte existieren, für deren Strahlenbüschel sämtliche Trägheitsmomente der Fläche übereinstimmen. Dies sind die sogenannten Fixpunkte.)

e) Ist eine der durch O gehenden Achsen Symmetrieachse der Fläche F, so ist sie auch Symmetrieachse der Trägheitsellipse. Folglich: Eine Symmetrieachse einer Fläche ist stets eine der Hauptachsen der Trägheitsellipse, also liegt entweder der Fall des Maximums, oder der des Minimums vor. Gerade dieser Umstand erspart zahlreiche Rechnungen.

f) Die Summe zweier Trägheitsmomente für auf einander senkrechte Achsen ist konstant, nämlich gleich dem zugehörigen Polarmomente. Folglich mufs für die Ellipse folgender Satz existieren: Die Summe der Quadrate der reciproken Werte für je zwei auf einander senkrechte Halbmesser der Ellipse ist konstant, nämlich gleich $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

132) Die Centralellipse. Die dem Schwerpunkte einer Fläche entsprechende Ellipse heifst die Centralellipse. Sie ist von besonderer Wichtigkeit, weil von ihr aus alle anderen Trägheitsmomente durch Verschiebung ($T_1 = T + e^2 F$) gefunden werden können.

Auch von ihr gelten die letzten Symmetriebemerkungen.

Von besonderer Wichtigkeit ist folgendes:

Hat eine Fläche mehr als zwei Symmetrieachsen, so ist die Centralellipse ein Kreis.

In diesem Falle braucht man also nur ein einziges Trägheitsmoment wirklich zu berechnen. Dies gilt nicht nur von den regelmäfsigen Polygonen, sondern auch von zahlreichen anderen ebenen Gebilden, die für die Technik wichtig sind. Hierher gehören z. B. die Kreuzquerschnitte und die Schnitte gewisser Säulen und Flügelachsen. Davon wurde im Abschnitt 65 Gebrauch gemacht.

Für die Biegungs- und Strebfestigkeit lassen sich daraus sofort wichtige Folgerungen ablesen. Für die erstere ist der Ausdruck $\frac{T}{a}$ mafsgebend, wo a die Entfernung der äufsersten Fasern von der

Biegungsachse ist, für die andere der Ausdruck T selbst, der hier für alle Achsen derselbe ist. Für Figur 111 z. B. ist $\frac{T}{a}$ in Bezug auf die

Fig. 111.

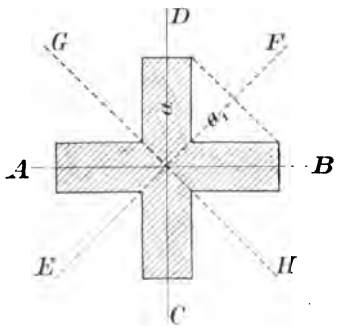
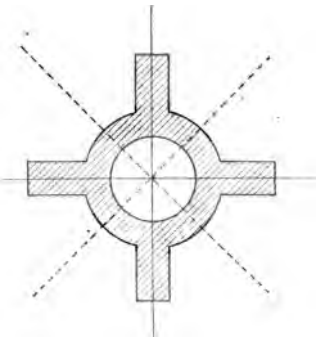


Fig. 112



Achse AB kleiner als $\frac{T}{a_1}$ in Bezug auf die Achse GH, die letztere Biegungsachse ist also für Biegungsbeanspruchung die günstigere. Entsprechendes gilt für Figur 112.

133) Lage der Hauptachsen für beliebige Trägheitsellipsen. Die Gleichung einer Trägheitsellipse einer Fläche für einen beliebigen Punkt ergab sich aus

1) $$T_\xi = T_x \cos^2 \alpha + T_y \sin^2 \alpha - \sin 2\alpha M_{xy}$$

als

2) $$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 2c^2 xy = 1.$$

Hätte in der ersten Gleichung für jedes α der dritte Posten gefehlt, d. h. wäre $M_{xy} = 0$ gewesen, so hätte er auch in der andern Gleichung gefehlt und man hätte die einfachste Gleichung der Ellipse erhalten. Folglich:

Ist für die beiden gewählten Achsen das Centrifugalmoment der Fläche gleich Null, so ist die Gleichung der Trägheitsellipse von der Form

3) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wo a und b Hauptachsen der Ellipse sind.

Umgekehrt folgt daraus, dafs das Centrifugalmoment in Bezug auf die Hauptachsen der Trägheitsellipse gleich Null ist.

Dies ist z. B. der Fall für jede Symmetrieachse einer Fläche und eine auf der ersteren senkrecht stehende Achse.

Hat ferner die Fläche mehr als zwei Symmetrieachsen, so ist die Centralellipse ein Kreis und man darf je zwei beliebige auf einander senkrechte Schwerpunktsachsen als Hauptachsen betrachten. Für jedes Paar von Schwerpunktsachsen ist also dann $M_{xy} = 0$. Nach dem Verschiebungssatze für Centrifugalmomente bleibt dies auch dann der Fall, wenn eine der Achsen Schwerpunktsachse ist und der Achsenschnittpunkt O sich auf ihr beliebig bewegt.

Folglich: Hat eine ebene Fläche mehr als zwei Symmetrieachsen, so ist für jede Schwerpunktsachse und eine irgendwo auf ihr errichtete Senkrechte das Centrifugalmoment gleich Null, d. h. für jeden beliebigen Punkt ist die durch ihn gelegte Schwerpunktsachse eine Hauptachse der Trägheitsellipse.

Gleichung 1) vereinfacht sich in solchen Fällen und überhaupt, wenn $M_{xy} = 0$ wird, zur folgenden:

4) $$T_\xi = T_x \cos^2 \alpha + T_y \sin^2 \alpha,$$

bezw.

5) $$\varrho^2 = \varrho_1^2 \cos^2 \alpha + \varrho_2^2 \sin^2 \alpha,$$

und dabei sind T_x und T_y Minimal- bezw. Maximalmomente, je nachdem das eine oder das andere das kleinere ist.

134) **Aufgabe.** T_x und T_y seien das minimale und maximale Trägheitsmoment für eine Fläche F und für das Strahlenbüschel eines beliebigen Punktes O. Wie grofs sind die Momente für die Winkelhalbierenden der Hauptachsen?

Auflösung. In Gleichung 4) ist $\alpha = 45^0$ einzuführen. Dies giebt

$$T_\xi = T_x \cos^2 45^0 + T_y \sin^2 45^0 = \frac{T_x + T_y}{2}.$$

Dasselbe gilt für den Winkel -45^0.

Folglich: Das Trägheitsmoment für die Gleichheitsachsen ist das arithmetische Mittel der beiden Grenzmomente. (Letzterer Ausdruck soll Abkürzung für die Worte Maximal- und Minimalmoment bedeuten.)

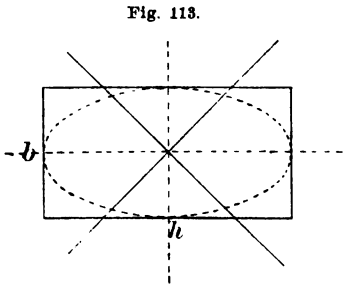
Folglich: Das Trägheitsmoment für die Gleichheitsachsen ist gleich der Hälfte des zugehörigen Polarmomentes.

135) **Aufgabe.** Die Centralellipse des Rechtecks zu berechnen und ihr Trägheitsmoment für die entsprechenden Gleichheitsachsen zu entwickeln.

Das Maximalmoment für Figur 113 ist $\frac{bh^3}{12}$, das Minimal-

moment $\frac{hb^3}{12}$, die Trägheitsradien sind $\varrho_2 = \sqrt{\frac{bh^3}{12}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$ und $\varrho_1 = \frac{b}{\sqrt{12}}$, die reciproken Werthe sind $a_1 = \frac{\sqrt{12}}{b}$, $b_1 = \frac{\sqrt{12}}{h}$, so dafs $a_1 : b_1 = \frac{1}{b} : \frac{1}{h} = h : b$. Die einbeschriebene Hauptellipse ist also der Centralellipse ähnlich. Um letztere im richtigen Mafsstabe zu erhalten, würde es der Feststellung einer Einheit bedürfen, wovon jetzt abgesehen werden soll. Für die schrägen Gleichheitsachsen ist

Fig. 113.



$$T_\xi = \frac{T_x + T_y}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{hb^3}{12} + \frac{bh^3}{12}\right)$$
$$= \frac{bh}{24}(b^2 + h^2) = \frac{F}{24}d^2,$$

wo F die Fläche des Rechtecks, d seine Diagonale ist.

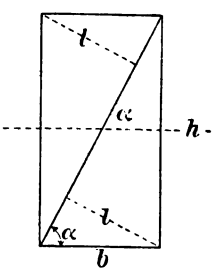
(Bei Millimetermafs fallen für die gebräuchlichen Querschnitte die Halbachsen äufserst klein aus. Wäre z. B. $h = 100$ mm, so würde $a = \frac{\sqrt{12}}{100}$ kaum sichtbar sein.

Ist allgemeiner die Länge 1 gegeben, und hat man $\varrho_1 = \frac{b}{\sqrt{12}}$ gezeichnet, so findet man $a_1 = \frac{1}{\varrho_1}$ mit Hülfe der Proportion $\varrho_1 : 1 = 1 : a_1$. Ebenso ist es mit $\varrho_2 = \frac{h}{\sqrt{12}}$ und $\varrho_2 : 1 = 1 : b_1$.)

136) **Aufgabe.** Wie grofs ist das Trägheitsmoment des Rechtecks in Bezug auf seine Diagonale d?

Auflösung. Aus

Fig. 114.



$$T_\xi = T_x \cos^2\alpha + T_y \sin^2\alpha$$

folgt, da

$$\sin\alpha = \frac{h}{d}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{d}$$

und

$$d = \sqrt{b^2 + h^2}$$

ist,

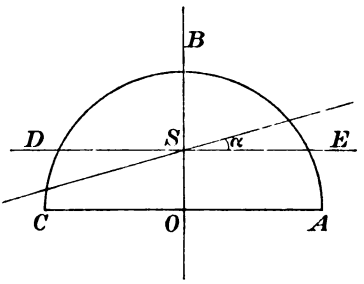
$$T_\xi = \frac{bh^3}{12}\frac{b^2}{d^2} + \frac{hb^3}{12}\frac{h^2}{d^2} = \frac{b^3h^3}{6d^2} = \frac{b^3h^3}{6(b^2+h^2)},$$

was auch mit Hülfe des Dreiecks gefunden werden konnte. [Jedes Diagonaldreieck giebt $\frac{dl^3}{12}$, die Gesamtfigur also $\frac{dl^3}{6}$. Nun ist aber

$dl = bh$, also $l = \frac{bh}{d}$, folglich $T_\xi = \frac{d}{6}\frac{b^3h^3}{d^3} = \frac{b^3h^3}{6d^2}$.] Kommt es auf gröfsere Genauigkeit nicht an, so kann man das Resultat an Fig. 113 ablesen.

137) **Aufgabe.** Wie grofs ist das Trägheitsmoment des Halbkreises für beliebige Schwerpunktsachsen?

Fig. 115.



In Bezug auf DE ist nach 68)

$$T_x = r^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) = r^4\pi\left(\frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2}\right).$$

In Bezug auf OB ist

$$T_y = \frac{r^4\pi}{8},$$

folglich für die unter α geneigte Schwerpunktsachse

$$T_\xi = r^4\pi\left(\frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2}\right)\cos^2\alpha + \frac{r^4\pi}{8}\sin^2\alpha.$$

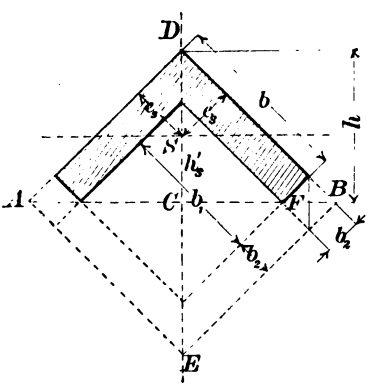
Für $\alpha = 45^0$ erhält man z. B.

$$T_\xi = \frac{r^4\pi}{2}\left[\frac{1}{4} - \frac{8}{9\pi^2}\right].$$

T_y ist das Maximal-, T_x das Minimalmoment, die Centralellipse hat also ihre Brennpunkte auf DE; BO ist also die günstigere Biegungsachse für die Festigkeit.

138) Beispiel des symmetrischen Winkeleisens.

Fig. 116.



Es war in Nr. 59)

$$T_x = \tfrac{1}{24}\left[(b_1 + b_2)^4 - b_1^4 - 2b_2^4\right] - h_s'^2\left(b^2 - b_1^2\right),$$

$$T_y = \frac{(b_1 + b_2)^4 - b_1^4}{12} - 2\left[\frac{b_2^4}{12} + \tfrac{1}{2}\left(b_1 + b_2\right)^2 b_2^2\right].$$

Dies sind die Grenzmomente, denn die Winkelhalbierenden geben Gleichheitsachsen. Für diese ist demnach

$$T_\xi = \frac{T_x + T_y}{2},$$

wodurch sich das Resultat 58) bei Fig. 64 bestätigen mufs.

139) Ausgang von den Gleichheitsachsen.

Für die Gleichheitsachsen ist $T_x = T_y$, wofür der Gleichheit halber T_g geschrieben werden soll. Für die Achse, die um α gegen die x-Achse gedreht ist, gilt jetzt nach Nr. 109 die Gleichung

$$T_\xi = T_g \cos^2\alpha + T_g \sin^2\alpha - \sin 2\alpha\, M_{xy}$$
$$= T_g (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - \sin 2\alpha\, M_{xy},$$

folglich

$$T_\xi = T_g - \sin 2\alpha\, M_{xy}.$$

Nimmt man M_{xy} als positiv an, so erhält man für $\alpha = 45^0$ und $\alpha = -45^0$ das Minimal- und Maximalmoment in der Form

$$T_1 = T_g - M_{xy}, \quad T_2 = T_g + M_{xy}.$$

Hieraus folgt durch Subtraktion

$$M_{xy} = \frac{T_2 - T_1}{2}.$$

Folglich: Das Centrifugalmoment in Bezug auf die Gleichheitsachsen ist gleich der halben Differenz der beiden Grenzmomente.

Namentlich bei einfach symmetrischen Querschnitten giebt dies mancherlei Rechnungserleichterungen. Für das vorige Beispiel z. B. ergiebt sich für die Gleichheitsachsen (abgesehen vom Vorzeichen)

$$M_{xy} = \frac{T_y - T_x}{2}.$$

140) Drehung der Achse des Centrifugalmomentes.

In beistehender Figur ist

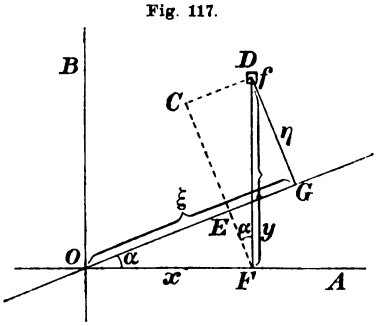
$$\xi = OE + CD = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$
$$\eta = FC - FE = y\cos\alpha - x\sin\alpha,$$

also

$$\xi\eta = xy\cos^2\alpha - xy\sin^2\alpha + y^2\sin\alpha\cos\alpha - x^2\sin\alpha\cos\alpha,$$

folglich

Fig. 117.



$$\sum f\xi\eta = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sum fxy + \sin\alpha\cos\alpha\left[\sum fy^2 - \sum fx^2\right],$$

oder

1) $$M_{\xi\eta} = \cos 2\alpha\, M_{xy} + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha\,(T_x - T_y).$$

Kennt man also das Centrifugalmoment und die beiden Trägheitsmomente in Bezug auf zwei zu einander senkrechte

Achsen, so erhält man durch Gleichung 1) das Centrifugalmoment für die um α gedrehte Achse.

Danach wird $M_{\xi\eta} = 0$ für

$$\tfrac{1}{2} \sin 2\alpha \,(T_y - T_x) = \cos 2\alpha \, M_{xy}$$

oder für

$$2) \qquad \tan 2\alpha = \frac{2 M_{xy}}{T_y - T_x},$$

woraus sich die Richtungen für die beiden Hauptachsen ergeben.

Geht man umgekehrt von den Hauptachsen aus, für die $M_{xy} = 0$ ist, so vereinfacht sich Gleichung 1) zu

$$3) \qquad M_{\xi\eta} = \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha \,(T_1 - T_2),$$

wo T_1 und T_2 Grenzmomente sind. Den Maximalwert hat man bei den Achsenrichtungen $\alpha = \pm 45^0$, nämlich

$$4) \qquad M_{\xi\eta} = \frac{T_1 - T_2}{2},$$

so dafs der Maximalwert des Centrifugalmomentes den Gleichheitsachsen angehört und daher auf einer der Hauptachsen graphisch darzustellen ist.

Geht man von den Gleichheitsachsen aus, so erhält man aus 1) die Gleichung

$$5) \qquad M_{\xi\eta} = \cos 2\alpha \, M_{xy},$$

so dafs aus dem maximalen Centrifugalmoment $\frac{T_1 - T_2}{2}$ alle übrigen bequem abgeleitet werden können.

Dies führt zu einer graphischen Darstellung aller Werte, auf die wir noch zurückkommen.

Gleichung 1) geht für $\alpha = 45^0$ über in $M_{\xi\eta} = \frac{T_x - T_y}{2}$, worin der unter 139 abgeleitete Satz als besonderer Fall enthalten ist.

141) **Aufgabe.** Gegeben seien die Trägheitsmomente T_x und T_y und das Centrifugalmoment M_{xy} in Bezug auf zwei aufeinander senkrechte Achsen. Die Hauptträgheitsachsen sollen bestimmt und die Grenzwerte des Trägheitsmomentes sollen berechnet werden.

Auflösung. Man erhält die Hauptachsen, wenn $M_{\xi\eta} = 0$ wird, also nach vorigem Abschnitt für

$$1) \qquad \tan 2\alpha = \frac{2 M_{xy}}{T_y - T_x},$$

woraus sich die Winkel α_1 und $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^0$ ergeben.

Diese Werte sind in die Bestimmungsgleichung

2) $$T_\xi = T_x \cos^2\alpha + T_y \sin^2\alpha - \sin 2\alpha M_{xy}$$

einzusetzen, und so erhält man die beiden Grenzwerte.

Um jedoch nicht verschiedene Winkel α und 2α in der Formel zu haben und um statt der verschiedenen Funktionen nur eine zu erhalten, setze man nach bekannten Formeln

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \text{und} \quad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

und schreibe Gleichung 1) in der Form

1*) $$\sin 2\alpha = \frac{2 M_{xy} \cos 2\alpha}{T_y - T_x}.$$

Dadurch geht 2) über in

$$T_\xi = T_x \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + T_y \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{2 M_{xy}^2 \cos 2\alpha}{T_y - T_x}$$

oder in

$$T_\xi = \tfrac{1}{2}(T_y + T_x) - \tfrac{1}{2}(T_y - T_x)\cos 2\alpha - \frac{2 M_{xy}^2 \cos 2\alpha}{T_y - T_x}$$

oder in

$$T_\xi = \tfrac{1}{2}(T_y + T_x) - \tfrac{1}{2}(T_y - T_x)\cos 2\alpha \left[1 + \frac{4 M_{xy}^2}{(T_y - T_x)^2}\right]$$

oder unter Benutzung von Gleichung 1)

$$T_\xi = \tfrac{1}{2}(T_y + T_x) - \tfrac{1}{2}(T_y - T_x)\cos 2\alpha [1 + \tan^2 2\alpha].$$

Die beiden letzten Faktoren formen sich um zu

$$\cos 2\alpha \left[1 + \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}\right] = \cos 2\alpha \frac{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} = \cos 2\alpha \frac{1}{\cos^2 2\alpha}$$

$$= \frac{1}{\cos 2\alpha} = \sec 2\alpha,$$

so dafs wird

3) $$T_\xi = \tfrac{1}{2}(T_x + T_y) + \tfrac{1}{2}(T_x - T_y)\sec 2\alpha.$$

Setzt man $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^0$ ein, so erhält man

4) $$T_\eta = \tfrac{1}{2}(T_x + T_y) - \tfrac{1}{2}(T_x - T_y)\sec 2\alpha.$$

Durch 3) und 4) findet man die Grenzwerte des Trägheitsmomentes, den Hülfswinkel α mittelst der Gleichung 1*). Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst.

Auf dasselbe Resultat führt die später zu behandelnde Maximal- und Minimal-Methode. Damit ist eine der wichtigsten Aufgaben der Festigkeitslehre gelöst, denn an der Trägheitsellipse erkennt man z. B. sofort, dafs ein auf Strebfestigkeit beanspruchter Stab senkrecht gegen die kleine Achse standhält, in ihrer Richtung aber biegend nachgiebt.

142) Die Curve der Radien des Centrifugalmomentes.

In Nr. 140 war zur Berechnung des Centrifugalmomentes für die um α gedrehten Achsen folgende Formel angewandt:

1) $$M_{\xi\eta} = \cos 2\alpha M_{xy} + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha (T_y - T_x).$$

Führt man die Radien der Momente durch die Gleichungen

$$F\lambda^2 = M_{\xi\eta}, \quad F\lambda_1^2 = M_{xy}, \quad F\varrho_1^2 = T_x, \quad F\varrho_2^2 = T_y$$

ein und dividiert man beiderseits durch F, so entsteht die Gleichung

2) $$\lambda^2 = \lambda_1^2 \cos 2\alpha + \tfrac{1}{2} \left(\varrho_2^2 - \varrho_1^2\right) \sin 2\alpha.$$

Sind hier T_x und T_y die beiden Grenzmomente, sind also die Achsen die Hauptachsen, so ist $M_{xy} = 0$, also auch $\lambda_1 = 0$, die Gleichung vereinfacht sich also zu

3) $$\lambda^2 = \tfrac{1}{2} \left(\varrho_2^2 - \varrho_1^2\right) \sin 2\alpha.$$

Hier seien die Benennungen wieder so gewählt, dafs $\varrho_2 > \varrho_1$ ist. Dann bilde man

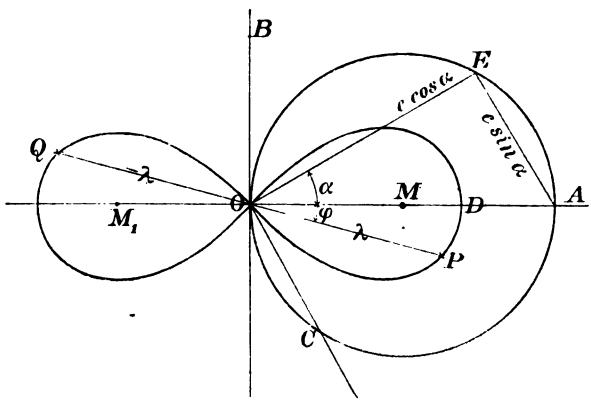
4) $$\varrho_2^2 - \varrho_1^2 = e^2,$$

so dafs sich ergiebt

5) $$\lambda^2 = \frac{e^2}{2} \sin 2\alpha = (e \sin\alpha)\,(e \cos\alpha),$$

so dafs λ mittlere Proportionale zwischen $e \sin\alpha$ und $e \cos\alpha$ ist.

Fig. 118.



Dies führt zu folgender Konstruktion für den Radius des Centrifugalmomentes für gegebenen Winkel α und $\alpha - 90^0$ und bei gegebenem Maximal-Radius ϱ_1 und Minimal-Radius ϱ_2.

Man bilde $OA = e = \sqrt{\varrho_2^2 - \varrho_1^2}$ und schlage den zu OA als Durchmesser gehörigen Kreis, ziehe die Sehnen OE und OC unter α^0 und $\alpha^0 - 90^0$ Neigung und verbinde E mit A. Zu $AE = e \sin\alpha$ und $OE = e \cos\alpha$ bilde man die mittlere Proportionale

λ und trage sie von O aus als Halbierende OP des Winkels EOC ein. Dann ist OP der Radius des gesuchten Centrifugalmomentes.

Bezeichnet man den Winkel AOP mit φ, so ist $\varphi = \alpha - 45^0$, also $\alpha = \varphi + 45^0$, so dafs Gleichung 3) übergeht in

$$\lambda^2 = \tfrac{1}{2}\left(\varrho_2^2 - \varrho_1^2\right)\sin(2\varphi + 90^0) = \tfrac{1}{2}\left(\varrho_2^2 - \varrho_1^2\right)\sin(90^0 - 2\varphi)$$

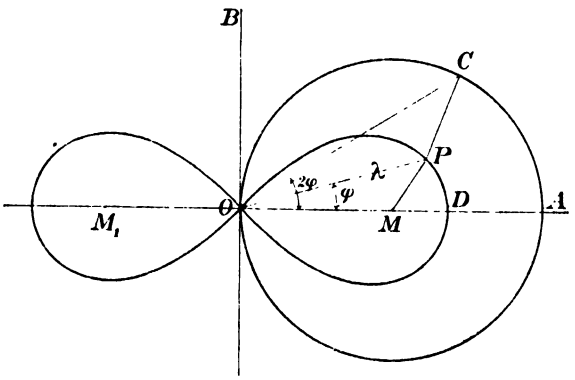
oder in

$$6) \qquad \lambda^2 = \tfrac{1}{2}\left(\varrho_2^2 - \varrho_1^2\right)\cos 2\varphi = \frac{e^2}{2}\cos 2\varphi.$$

Da jetzt λ und φ zusammengehören, was bei λ und α nicht der Fall war, so kann man 6) als Gleichung der gesuchten Kurve in Polarkoordinaten betrachten.

In Gleichung 6) liegt aber eine neuere und einfachere Konstruktion für den Radius λ des Centrifugalmomentes.

Fig. 119.



Man zeichne denselben Kreis wie vorher und trage $MOC = 2\varphi$ ein. Als Winkelhalbierende trage man die mittlere Proportionale zwischen OM und OC ein, was $OP = \lambda$ giebt. Dies ist der Radius des Centrifugalmomentes für die beiden unter $\pm 45^0$ gegen OP geneigten Achsen.

Beweis. Nach der Konstruktion ist

$$OM : OP = OP : OC,$$

also

$$OP^2 = OM \cdot OC = OM \cdot OA\cos 2\varphi = \frac{e}{2}(e\cos 2\varphi) = \frac{e^2}{2}\cos 2\varphi.$$

Dies stimmt mit der Gleichung 6) überein.

Man achte auf die Ähnlichkeit der Dreiecke OMP und OMC. Das in dieser Konstruktion liegende Abbildungsprinzip wird uns noch mehrfach beschäftigen.

Trägt man OP auch in entgegengesetzter Richtung ab, was der Gleichung $c = \pm\sqrt{\frac{M_{xy}}{F}}$ entspricht, so bilden die Endpunkte aller so konstruierten Radien OP eine schleifenförmige Kurve, die sogenannte

Lemniskate, genauer bezeichnet, die gleichseitige Lemniskate, über die später eingehender zu sprechen sein wird.

143) Dasselbe Resultat hätte man gefunden, wenn man von den Gleichheitsachsen ausgegangen wäre. Für diese geht, da für sie $T_x = T_y$, also $\varrho_1 = \varrho_2$ ist, Gleichung 2) über in

$$\lambda^2 = \lambda_1^2 \cos 2\alpha_1 = \frac{e^2}{2} \cos 2\alpha_1,$$

denn jetzt ist λ_1^2 gleich dem Maximalwerte $\frac{e^2}{2}$, also $\lambda_1 = e\sqrt{\frac{1}{2}} = OD$ in Fig. 119 und λ wäre aufzutragen gewesen auf die Gerade, die den Winkel zwischen α_1 und $\alpha_1 + 90^0$, die also mit der einen Gleichheitsachse den Winkel $\frac{\alpha_1 + (\alpha_1 + 90^0)}{2} = \alpha_1 + 45^0$ bildet. Setzt man $\alpha_1 + 45^0 = \varphi_1$, also $\alpha_1 = \varphi_1 - 45^0$, so geht die Gleichung für λ über in

$$\lambda^2 = \frac{e^2}{2} \cos 2(\varphi_1 - 45^0).$$

Hätte man aber von der um 45^0 zurückliegenden Hauptachse aus den Winkel gezählt, so hätte man statt φ_1 zu schreiben $\varphi + 45^0$ und aus $\varphi_1 - 45^0$ wäre geworden $\varphi + 45^0 - 45^0 = \varphi$. Demnach hätte man wieder die Gleichung

6) $$\lambda^2 = \frac{e^2}{2} \cos 2\varphi$$

gefunden.

144) Bemerkungen über die Lemniskate des Centrifugalmomentes.

OA und OB sind die Hauptachsen der Trägheitsellipse. Da $\varrho_2 > \varrho_1$ angenommen war, ist $\frac{1}{\varrho_2} < \frac{1}{\varrho_1}$, d. h. die grofse Achse der Trägheitsellipse fällt in die Richtung OA, die kleine in die Richtung OB. Man bezeichnet die Punkte M und M_1 als Brennpunkte der Lemniskate. Für $\varphi = 0$ ist $\lambda^2 = \frac{e^2}{2} \cos 0 = \frac{e^2}{2}$, dies giebt den Maximalwert $OD = e\sqrt{\frac{1}{2}} = OA\sqrt{\frac{1}{2}}$ für den Radius des Centrifugalmomentes. Für $\varphi = \pm 45^0$ erhält man

$$\lambda^2 = \frac{e^2}{2} \cos 90^0 = 0.$$

Demnach geben die Richtungen $\pm 45^0$ unendlich kleine Sehnen, d. h. Tangenten. Im Punkte O haben also die Tangenten der Lemniskate die Richtungen $\pm 45^0$. Es verhält sich

$$OM : OD = \frac{e}{2} : \frac{e}{2}\sqrt{2} = 1 : \sqrt{2}.$$

Durch Gleichung 6) war die Lemniskate in Polarkoordinaten dargestellt. In gewöhnlichen Koordinaten würde sie folgendermafsen zu bilden sein. Es ist

$$x^2 + y^2 = \lambda^2, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\lambda} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\lambda} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

also

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Gleichung 6) geht aber über in

$$x^2 + y^2 = \frac{e^2}{2}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

oder in

7) $$(x^2+y^2)^2 = \frac{e^2}{2}(x^2-y^2).$$

Fig. 120.

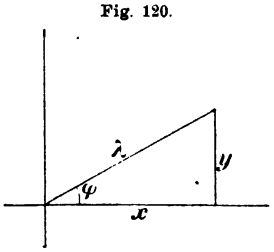
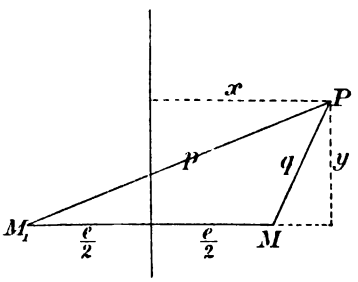


Fig. 121.



Die Haupteigenschaft der Kurve ergiebt sich aus Folgendem: Man verbinde einen Lemniskatenpunkt P mit M und M_1, dann ist

$$p^2 = \left(x + \frac{e}{2}\right)^2 + y^2,$$

$$q^2 = \left(x - \frac{e}{2}\right)^2 + y^2,$$

folglich

$$p^2q^2 = \left[\left(x^2+y^2+\frac{e^2}{4}\right) + ex\right]\cdot\left[\left(x^2+y^2+\frac{e^2}{4}\right) - ex\right]$$

$$= \left(x^2+y^2+\frac{e^2}{4}\right)^2 - e^2x^2$$

oder

$$p^2q^2 = (x^2+y^2)^2 + \frac{e^2}{2}(x^2+y^2) + \frac{e^4}{16} - e^2x^2.$$

Nach Gleichung 7) ist aber für die Lemniskatenpunkte

$$0 = (x^2+y^2)^2 - \frac{e^2}{2}(x^2-y^2).$$

Durch Subtraktion folgt aus den letzten beiden Gleichungen

$$p^2q^2 = e^2x^2 + \frac{e^4}{16} - e^2x^2 = \frac{e^4}{16},$$

also ist

8) $$pq = \frac{e^2}{4} = \left(\frac{e}{2}\right)^2.$$

Das Produkt der „Brennstrahlen“ einer Lemniskate ist also eine konstante Gröfse.

Ist λ_m der Maximalbetrag für den Radius des Centrifugalmomentes, so ist $\lambda_m = e\sqrt{\frac{1}{2}}$, man kann also auch schreiben

$$pq = \frac{(\lambda_m\sqrt{2})^2}{4} = \frac{\lambda_m^2}{2}.$$

Aus der Eigenschaft 8), welche die Lemniskate als besonderen Fall der Cassinischen Kurven $pq = a^2$ erscheinen läfst, folgt eine weitere einfache Konstruktion der Lemniskate. Nimmt man nämlich p willkürlich an, so konstruiert man nach 8) q mit Hülfe der Proportion

$$p : \frac{e}{2} = \frac{e}{2} : q.$$

Die Lemniskate füllt eine gewisse Lücke in der Kurvenlehre aus, denn $p + q = 2a$ und $p - q = 2a$ sind die Gleichungen der Ellipse und der Hyperbel, $\frac{p}{q} = c$ ist die Gleichung des Kreises. Hier erscheint $p \cdot q = c$ als Gleichung der Lemniskate, womit eine gewisse Gruppe von Kurven abgeschlossen ist. — Später soll näher auf diese Kurve eingegangen werden.

145) Die Fixpunkte oder die Punkte konstanten Trägheitsmomentes.

Die durch den Schwerpunkt gehenden Koordinatenachsen seien die Achsen kleinsten und gröfsten Trägheitsmomentes T_x und T_y. Auf der Y-Achse trage man die Entfernungen SC_1 und SC_2 gleich $\sqrt{\varrho_2^2 - \varrho_1^2} = \pm e$ ab. Dann wird behauptet, C_1 und C_2 seien für die beliebig gestaltete Fläche F die Punkte konstanten Trägheitsmomentes.

Beweis. Für jede Achse, die mit der Hauptachse X den Winkel α bildet, ist, da für die Hauptachse $M_{xy} = 0$ ist, nach Nr. 133

$$\varrho_\alpha^2 = \varrho_2^2 \sin^2\alpha + \varrho_1^2 \cos^2\alpha,$$

also ist für die parallele um p entfernte Achse KL nach dem Verschiebungssatze (wo F sich weghebt)

$$\varrho^2 = \varrho_\alpha^2 + p^2 = \varrho_2^2 \sin^2\alpha + \varrho_1^2 \cos^2\alpha + p^2.$$

Sind nun p_1 und p_2 die von C_1 und C_2 auf die neue Achse gefällten Lote, so ist

$$p_1 = p - e\cos\alpha, \quad p_2 = p + e\cos\alpha,$$

folglich

$$p_1 p_2 = p^2 - e^2\cos^2\alpha,$$

folglich

$$p^2 = p_1 p_2 + e^2\cos^2\alpha$$
$$= p_1 p_2 + \left(\varrho_1^2 - \varrho_2^2\right)\cos^2\alpha,$$

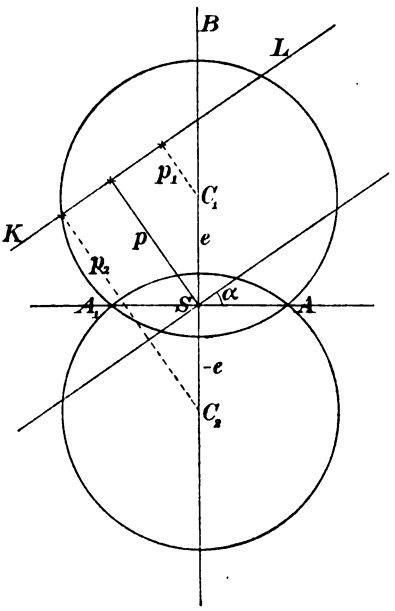
und demnach

$$\varrho^2 = \varrho_2^2\sin^2\alpha + \varrho_1^2\cos^2\alpha$$
$$+ p_1 p_2 + \varrho_2^2\cos^2\alpha - \varrho_1^2\cos^2\alpha$$

oder

$$\varrho^2 = \varrho_2^2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + p_1 p_2$$
$$= \varrho_2^2 + p_1 p_2.$$

Fig. 122.



Legt man nun die Parallele durch C_1 oder durch C_2, so wird entweder p_1 oder p_2 gleich Null, d. h. es wird $\varrho = \varrho_2$, und dabei ist α ganz gleichgiltig.

Folglich: Legt man durch die Fixpunkte C_1 und C_2 beliebig gerichtete Achsen, so ist für sämtliche das Trägheitsmoment gleich grofs und ergiebt sich aus dem Radius ϱ_2 des maximalen Trägheitsmomentes.

Für beide Fixpunkte gehen also die Trägheitsellipsen in Kreise über.

Kennt man die Lage der Fixpunkte, so berechnet sich das Trägheitsmoment für jede beliebige Achse der Ebenen mit Hülfe der Gleichung

$$\varrho^2 = \varrho_2^2 + p_1 p_2,$$

wo p_1 und p_2 die Entfernungen der Geraden von den Fixpunkten sind.

(Der zweite Posten ist positiv, wenn p_1 und p_2 gleichgerichtet sind, negativ bei entgegengesetzter Richtung.)

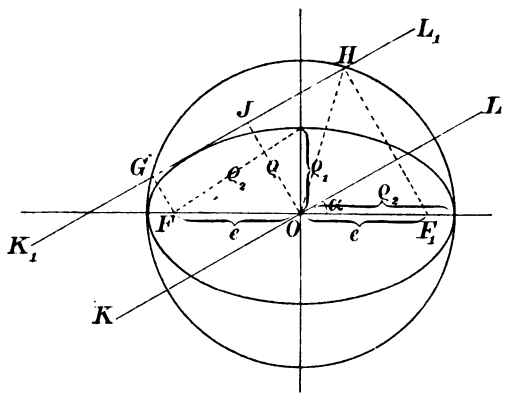
Der grofse Vorteil liegt darin, dafs jetzt goniometrische Funktionen überflüssig sind, und dafs auch graphisch verfahren werden kann.

146) Die Culmansche Trägheitsellipse. Es sei erwähnt, dafs im Anschlufs an Clebsch durch Culmann eine zweite Trägheitsellipse eingeführt worden ist, deren bisher absichtlich nicht gedacht wurde. Es handelt sich um die Ellipse

$$\frac{x^2}{\varrho_2^2} + \frac{y^2}{\varrho_1^2} = 1,$$

welche ϱ_1 und ϱ_2, d. h. den Maximal- und den Minimalwert des Trägheitsradius für das Strahlenbüschel durch einen beliebigen Punkt O zn Achsen hat.

Fig. 123.



Ihre Bedeutung ergiebt sich aus folgender Betrachtung.

In Fig. 123 ist ein Kreis mit Radius ϱ_2 und die Culmannsche Ellipse für einen beliebigen Punkt O der Ebene gezeichnet. Durch O ist eine beliebige Gerade KL mit Neigung α gezeichnet. Legt man durch die mittels $e = \sqrt{\varrho_2^2 - \varrho_1^2}$ konstruierten Brennpunkte F und F_1 Senkrechte zu ihr, so geben die Schnitte G und H mit dem Kreise bekanntlich eine Tangente der Ellipse. (Vergl. Meth. Lehrbuch II, Ster. 14.) Es wird behauptet, OJ sei der Trägheitsradius für KL.

Beweis:

$$\begin{aligned} OJ^2 &= OH^2 - JH^2 = \varrho_2^2 - (OF_1 \cdot \cos\alpha)^2 = \varrho_2^2 - e^2\cos^2\alpha \\ &= \varrho_2^2 - \left(\varrho_2^2 - \varrho_1^2\right)\cos^2\alpha = \varrho_2^2\left(1 - \cos^2\alpha\right) + \varrho_1^2\cos^2\alpha \\ &= \varrho_2^2\sin^2\alpha + \varrho_1^2\cos^2\alpha. \end{aligned}$$

Es ist aber auch für die unter α geneigte Gerade nach Nr. 133

$$\varrho^2 = \varrho_2^2\sin^2\alpha + \varrho_1^2\cos^2\alpha,$$

also ist $OJ^2 = \varrho^2$ und $OJ = \varrho$.

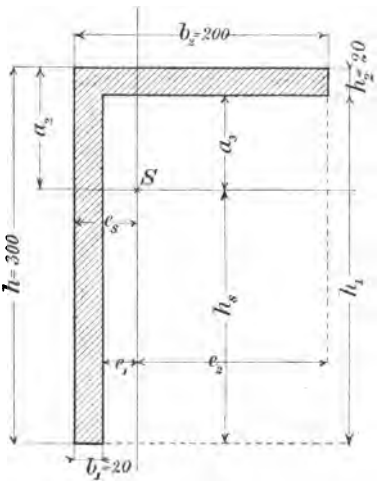
Folglich: Berechnet man für jede durch O gehende Gerade das Trägheitsmoment der Fläche F, und zieht man für jede eine Parallele in dem berechneten Abstande, so umhüllen die Parallelen die Culmannsche Trägheitsellipse.

Diese Ellipse ist namentlich in graphischer Hinsicht von Wichtigkeit, und sie wird hier nur vorläufig erwähnt, um Verwechselungen vorzubeugen. Ist O der Schwerpunkt S, so hat man die Culmannsche Centralellipse.

Die Culmannsche Trägheitsellipse ist ähnlich und ähnlich liegend zur ersten Ellipse. Die Mittelpunkte beider fallen zusammen. Die Brennpunkte der Lemniskate des Centrifugalmoments liegen auf der grofsen Achse beider Ellipsen, die Fixpunkte auf der kleinen. Später soll die zweite Ellipse eingehend behandelt werden.

147) Um zu erkennen, auf was es bei den Berechnungen dieses Kapitels ankommt, mufs man einige numerische Beispiele nach jeder Richtung hin durchrechnen. Wird z. B. mit Millimetern gerechnet, so nimmt die Trägheitsellipse erster Art mikroskopisch kleine Dimensionen an, so dafs man sie in 1000- bis 10 000-fachem Mafsstabe zeichnen mufs, um sie zu veranschaulichen. Die Culmannsche Ellipse dagegen erhält brauchbare Dimensionen. Für den Maschinenbau sind solche Berechnungen von geringerer Wichtigkeit, wohl aber für die Eisenkonstruktionen des Hochbau- und Brückenbauwesens. Für die dort auftretenden Querschnitte sind Normalprofile festgestellt. Jedes derselben kann als lehrreiches Übungsbeispiel Verwendung finden. Im nachstehenden Abschnitte ist ein ungleichschenkliges Winkeleisen numerisch behandelt. Ein Normalprofil wurde absichtlich nicht genommen, um gewisse Eigentümlichkeiten schärfer hervortreten zu lassen.

Fig. 124.



Abgesehen von der rein praktischen Verwertung für die Festigkeitslehre lassen sich aber viele physikalische Betrachtungen über die Theorie der Drehung, der Centrifugalkraft, der Pendelschwingungen, des Stofses, des Wasserdrucks u. dgl. mit jedem solchen Beispiele verbinden.

148) Beispiel des ungleichschenkligen Winkeleisens.

Gegeben sei $h = 300$ mm, $h_2 = 20$ mm $= b_1$, $b_2 = 200$ mm. Die Hauptaufgabe soll darin bestehen, die Lage der Hauptträgheitsachsen für den Schwerpunkt zu bestimmen und daraus gewisse Schlüsse zu ziehen. Der Einfachheit halber sind die Resultate jedesmal auf ganze Millimeter abgerundet. Dadurch treten

Ungenauigkeiten in die Rechnung, die praktisch ohne Belang sind, da der homogene Charakter des Materials doch niemals verbürgt werden kann.

a) Schwerpunktsbestimmung. Die Koordinaten des Schwerpunkts werden nach Nr. 3)

$$h_s = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2 h_1 + h_2)}{2 (b_1 h_1 + b_2 h_2)} = \frac{20 \cdot 280^2 + 200 \cdot 20 (560 + 20)}{2 (20 \cdot 280 + 200 \cdot 20)}$$

$$= \frac{3\,888\,000}{19\,200} = \sim 203 \text{ mm},$$

$$e_s = \frac{b_1^2 h_1 + b_2 h_2}{2 (b_1 h_1 + b_2 h_2)} = \frac{20^2 \cdot 280 + 200^2 \cdot 20}{2 (20 \cdot 280 + 200 \cdot 20)} = \frac{912\,000}{19\,200} = \sim 48 \text{ mm}.$$

b) Die Trägheitsmomente T_x und T_y werden nach Nr. 61)

$$T_x = \tfrac{1}{3} \left[b_1 h_s^3 + b_2 a_2^3 - b_3 a_3^3 \right]$$

$$= \tfrac{1}{3} \left[20 \cdot 203^3 + 200 \cdot 97^3 - 180 \cdot 77^3 \right] = \sim 89\,220\,000.$$

$$T_y = \tfrac{1}{3} \left[h e_s^3 - h_1 e_1^3 + h_2 e_2^3 \right]$$

$$= \tfrac{1}{3} \left[300 \cdot 48^3 - 280 \cdot 28^3 + 20 \cdot 152^3 \right] = \sim 32\,420\,000.$$

Demnach ist das polare Trägheitsmoment für den Schwerpunkt

$$T_p = 121\,640\,000.$$

c) Das Centrifugalmoment M_{xy} für die Schwerpunktsachsen.

Für den Mittelpunkt jedes Rechtecks ist das Centrifugalmoment gleich Null. Nach dem Verschiebungssatze ist dann $M_1 = 0 + p_1 q_1 F_1$, $M_2 = 0 + p_2 q_2 F_2$, und zwar sind die p positiv einzustellen bei Verschiebung nach links, die q positiv bei Verschiebung nach unten. Für das Rechteck mit Seite 300 sind die Verschiebungen $p_1 = -38$, $q_1 = -53$, die Fläche $F_1 = 6000$. Für das Rechteck mit Seite $200 - 20 = 180$ sind die Verschiebungen $p_2 = +62$, $q_2 = +87$, die Fläche $F_2 = 3600$.

So ergiebt sich

$$M_1 = 0 + (-38)(-53)\,6000 = 12\,080\,000,$$

$$M_2 = 0 + (+62)(+87)\,3600 = 19\,420\,000,$$

folglich ist das gesamte Centrifugalmoment

$$M_{xy} = M_1 + M_2 = 31\,500\,000.$$

d) Die Lage der Hauptträgheitsachsen.

Nach Nr. 140 ist

$$\tan 2\alpha = \frac{2 M_{xy}}{T_y - T_x} = \frac{63\,000\,000}{-\,56\,800\,000} = -\frac{630}{568}.$$

$\lg \frac{630}{568} = \lg \tan \xi = 0{,}04499$, also gehört zum positiven Bruche im ersten Quadranten der Winkel $\xi = 47^0\,58'$, zum negativen Bruche also im zweiten Quadranten der Winkel $2\alpha = 132^0\,2'$, so dafs $\alpha = 66^0\,1'$ ist. Folglich:

Die eine Hauptachse der Trägheit ist unter $66^0\,1'$ gegen die positive Richtung der X-Achse geneigt. Die andere steht senkrecht dagegen.

e) Das maximale und das minimale Trägheitsmoment.

Nach Nr. 141) wird für die beiden Grenzmomente

$$T = \frac{T_x + T_y}{2} \pm \frac{T_x - T_y}{2} \sec 2\alpha$$

$$= 60\,820\,000 \pm \frac{28\,400\,000}{\cos 132^0\,2'} = 60\,820\,000 \mp 42\,420\,000.$$

Folglich ist

$$T_{\max} = 103\,240\,000, \quad T_{\min} = 18\,400\,000.$$

Die Summe beider giebt selbstverständlich wieder T_p.

f) Das maximale Centrifugalmoment für das Strahlenbüschel durch S ist

$$M_{\max} = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{2} = 42\,420\,000.$$

g) Die Grenzwerte der Trägheitsradien.

$$\varrho_{\max} = \sqrt{\frac{T_{\max}}{F}} = \sqrt{\frac{103\,240\,000}{9\,600}} = 103{,}71 \text{ mm} = \sim 104 \text{ mm},$$

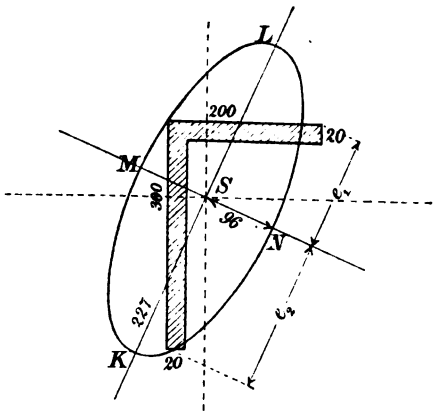
$$\varrho_{\min} = \sqrt{\frac{T_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{18\,400\,000}{9\,600}} = 43{,}78 \text{ mm} = \sim 44 \text{ mm}.$$

h) Die erste Centralellipse würde die Halbachsen $\frac{1}{104}$ mm und $\frac{1}{44}$ mm erhalten, so dafs ihre graphische Darstellung bei den angenommenen Mafsen nicht praktisch erscheint. In umstehender Figur ist sie im willkürlich gewählten 10 000-fachen Mafsstabe eingetragen, was $b = 96$ mm, $a = 227$ mm giebt. Letzteres fällt in die Richtung KL, ersteres in die Richtung MN.

Hauptachse ist das Verhältnis 104 : 44 oder 26 : 11 oder etwa 5 : 2 für beide Achsen.

Man erkennt für die Festigkeitslehre sofort Folgendes: Bei Strebbeanspruchung giebt das Winkeleisen in der Richtung MN nach, hält aber stand in der Richtung KL. Die Tragfähigkeit im einfachsten Einspannungsfalle ist, wie die Festigkeitslehre zeigt, höchstens

Fig. 125.



$$P = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{T_{\min} \cdot E}{l^2},$$

wo P die Tragfähigkeit, E der Elasticitätsmodul des Materials, l die Höhe ist. (Alles auf Kilogramme und Millimeter reduziert.)

Bei Biegungsbeanspruchung durch ein in senkrechter Ebene wirkendes Kräftepaar würde es am günstigsten sein, MN horizontal anzubringen. Im Falle des Freiträgers würde die Grenze der Tragfähigkeit sein $P = \frac{SW}{l}$, wo S die zulässige Spannung des Materials, l die Länge des Freiträgers, $W = \frac{J}{e_1}$ bezw. $W = \frac{J}{e_2}$ das Widerstandsmoment (auch Querschnittsmodul Z genannt) des Querschnitts bedeutet. MN ist bei dieser Belastungsart neutrale Achse, e_1 und e_2 sind die Entfernungen der äufsersten Fasern des Materials, wo die Zug- und Druckspannung am stärksten werden. Welcher von den beiden Moduln zu wählen ist, hängt von den Tragmoduln des Materials für Zug und Druck ab.

Die Festigkeitslehre zeigt ferner Folgendes. Wird der Freiträger in beliebiger Lage eingemauert, z. B. in der gezeichneten, und wirkt das Kräftepaar in senkrechter Ebene, so gilt als neutrale Achse der zu dieser Ebene konjugierte Durchmesser der Ellipse, dessen Richtung sich aus der Tangente im Schnittpunkte ergiebt.

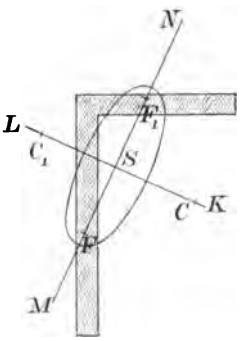
Denkt man sich den Querschnitt homogen mit Masse belegt und um eine in seiner Ebene liegende Schwerpunktsachse gedreht, so setzt er der beschleunigten Drehung den gröfsten Widerstand entgegen, wenn MN Drehungsachse ist, den geringsten, wenn KL als solche gewählt wird. Die entsprechende Energie wird im ersten Falle $T_{\max} \frac{\vartheta^2}{2}$, im andern $T_{\min} \frac{\vartheta^2}{2}$, wo ϑ die Winkelgeschwindigkeit ist.

Aus der Drehung um eine Achse, die in S auf der Querschnitts-

ebene senkrecht steht, wird die Centrifugalkraft gleich Null, die Energie wird $T_p \frac{\vartheta^2}{2}$.

i) Die Culmannsche Trägheitsellipse. Ihre lange Hauptachse fällt mit der der ersten Trägheitsellipse zusammen, der sie ähnlich ist. Die Hauptachse $a_1 = 104$ mm fällt in die Richtung MN. Die Brennpunkte F und F_1 liegen in den Entfernungen

Fig. 126.



$$e = \sqrt{\underset{\max}{\varrho^2} - \underset{\min}{\varrho^2}} = \sqrt{104^2 - 44^2} = \sim \pm 94 \text{ mm}$$

von S auf MN.

Trägt man diese Entfernungen von S aus auf KL ab, so findet man die Fixpunkte C und C_1 des Querschnittes. Für diese sind also die Trägheitsellipsen Kreise vom Radius $\underset{\max}{\varrho} = 104$ mm. Für beliebig gerichtete durch C und C_1 gehende Achsen sind die Trägheitsmomente gleich $\underset{\max}{T} = 103\,240\,000$. Man erhält den Trägheitsradius für eine beliebige Achse der Ebene durch die Gleichung

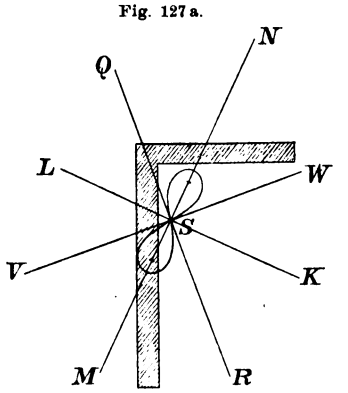
$$\varrho^2 = \underset{\max}{\varrho^2} + p_1 p_2 = 104^2 + p_1 p_2,$$

wo p_1 und p_2 die von den Fixpunkten aus auf die neue Achse gefällten Lote sind.

Für jede durch S gehende Achse findet man den Trägheitsradius, indem man auf die parallele Tangente der zweiten Ellipse ein Lot fällt.

k) Die Lemniskate der Centrifugalmomente für je zwei Schwerpunktsachsen.

Fig. 127a.



Ihre Brennpunkte fallen in die Richtung MN und haben von S die Entfernung $\pm \frac{e}{2} = \pm \frac{94}{2} = \pm 47$. Der gröfste Halbmesser SG wird gleich $e\sqrt{\frac{1}{2}} = 94\sqrt{\frac{1}{2}} = \sim 66 \text{ mm} = \lambda$.

Da $\lambda^2 F = M_{\max}$ werden mufs, so ergiebt sich hier eine wichtige Rechnungsprobe. Man erhält in der That den früheren Werth $\lambda^2 . 9600 = 42\,420\,000$.

Einige Punkte der Lemniskate hätte man aus dem Obigen ableiten können. Für die unter 45° geneigte Gerade hätte man als

Radius des Centrifugalmoments gefunden $\lambda_{xy} = \sqrt{\frac{M_{xy}}{F}} = \sqrt{\frac{31\,500\,000}{9600}}$ $= \sim 57$ mm. Dies mufs mit der Zeichnung übereinstimmen und giebt durch Symmetrie noch drei andere Punkte der Kurve.

1) Bei der Drehung um irgend eine in der Querschnittsebene liegende Schwerpunktsachse entsteht im allgemeinen ein aus zwei senkrecht gegen diese gerichteten Centrifugalkräften zu bildendes Centrifugalmoment, dessen Gröfse durch den winkelhalbierenden Radius der Lemniskate angegeben wird. Dieser Radius ist gleich Null in

Fig. 127 b.

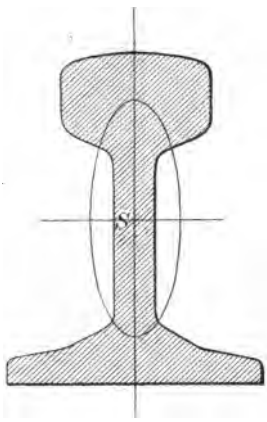
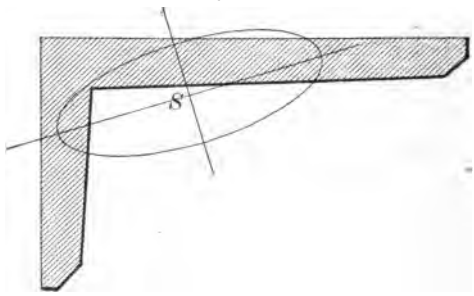


Fig. 127 c.



den Richtungen der Tangente RQ und VW, folglich ist das Centrifugalmoment gleich Null für die Hauptachsen KL und MN. Diese

Fig. 127 d.

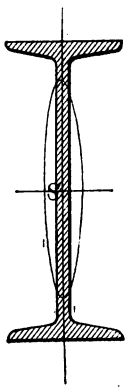


Fig. 127 e.

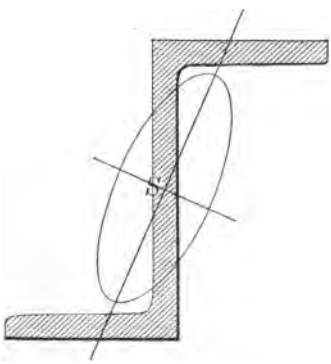
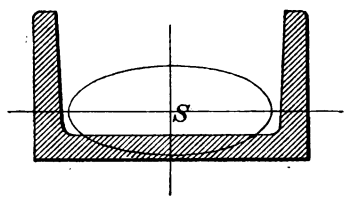


Fig. 127 f.



sind also freie Achsen des Querschnittes. Die dritte freie Achse ist das in S auf der Querschnittsebene errichtete Lot.

m) Auf andere Aufgaben der Mechanik, bei denen es sich um Pendelschwingungen, excentrischen Stofs, um Mittelpunkt des Wasserdrucks und dgl. handelt, sei gelegentlich dieses Übungsbeispiels nur kurz hingedeutet, da sie nur für die Übung im Ansatze, nicht aber für die Praxis Wert haben.

149) Im Anschluss an Culmanns Graphische Statik sind in den nebenstehenden Figuren noch einige Centralellipsen zweiter Art für gewisse Querschnitte skizziert worden, die für Übungsbeispiele brauchbar sind.

Fig. 127 g.

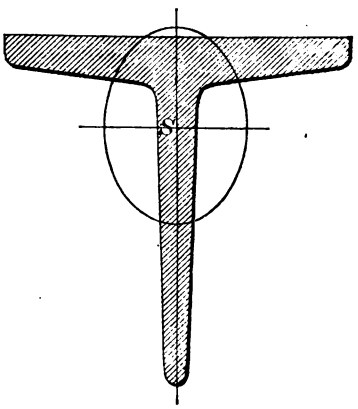


Fig. 127 h.

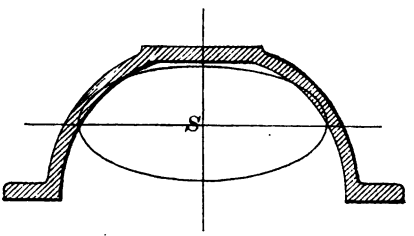
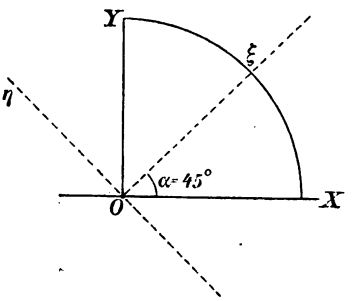


Fig. 127[b] stellt den Querschnitt einer Schiene dar, Fig. 127[c] ein Winkeleisen, Fig. 127[d] ein ⌶-Eisen, Fig. 127[e] ein **Z**-Eisen, Fig. 127[f] ein **U**-Eisen, Fig. 127[g] ein **T**-Eisen, Fig. 127[h] ein Quadrant-Eisen, auch Zores-Eisen genannt.

Fig. 128.



150) **Aufgabe.** Die Grenzträgheitsmomente des Viertelkreises für den Mittelpunkt zu berechnen.

Aus $T_x = T_y = \frac{r^4\pi}{16}$ folgt nach der Gleichung

$$T_\alpha = T_x \cos^2\alpha + T_y \sin^2\alpha - \sin 2\alpha M_{xy}$$

für den $\sphericalangle \alpha = 45^0$

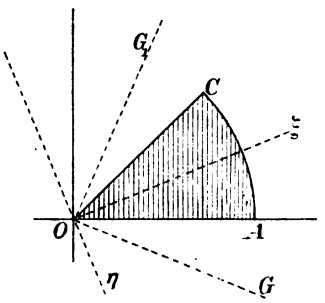
$$T_\xi = T_x(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - \sin 2\alpha M_{xy} = T_x - \sin 2\alpha M_{xy}.$$

Nun ist aber $M_{xy} = \frac{r^4}{8}$, folglich

$$T_\xi = \frac{r^4\pi}{16} - \sin(2\cdot 45^0)\, M_{xy} = \frac{r^4\pi}{16} - \frac{r^4}{8} = \frac{r^4}{16}(\pi - 2) = T_{\min},$$

$$T_\eta = \frac{r^4\pi}{16} - \sin(-90^0)\, M_{xy} = \frac{r^4\pi}{16} + \frac{r^4}{8} = \frac{r^4}{16}(\pi + 2) = T_{\max}.$$

Fig. 129.



151) **Aufgabe.** Dasselbe für den Achtelkreis.

Nach vorigem Abschnitt folgt aus T_ξ für T_x die Hälfte, also

$$T_x = \frac{r^4}{32}(\pi - 2).$$

Da aber $T_p = \frac{r^4\pi}{16}$ ist, so folgt

$$T_y = T_p - T_x = \frac{2r^4\pi}{32} - \frac{r^4}{32}(\pi - 2) = \frac{r^4}{32}(\pi + 2).$$

Für die Gleichheitsachsen OG und OG_1 hat man

$$T_g = \frac{T_p}{2} = \frac{r^4\pi}{32}.$$

Wie vorher, ist

$$T_x = T_g(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - \sin 2\alpha\, M_{gg} = T_g - \sin\left(2\cdot 22\tfrac{1}{2}^0\right) M_{gg},$$

folglich

$$M_{gg}\sin 45^0 = T_g - T_x$$

und das Maximum des Centrifugalmomentes für O

$$M_{gg} = \frac{T_g - T_x}{\sin 45^0} = \frac{\frac{r^4\pi}{32} - \frac{r^4}{32}(\pi - 2)}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{r^4}{16}\sqrt{2}.$$

Folglich ist

$$M_{xy} = \cos 2\alpha\, M_{gg} + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha\,(T_g - T_g) = \cos 45^0 \cdot \frac{r^4}{16}\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\frac{r^4}{16}\sqrt{2} = \frac{r^4}{16},$$

demnach

$$T_\xi = T_x \cos 22\tfrac{1}{2}^0 + T_y \sin 22\tfrac{1}{2}^0 - \sin 45^0 M_{xy} = \frac{r^4}{32}(\pi - 2)\,\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}$$
$$+ \frac{r^4}{32}(\pi + 2)\,\frac{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\frac{r^4}{16} = \frac{r^4\pi}{32} - \frac{r^4}{16}\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \frac{r^4}{16}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$= \frac{r^4\pi}{32} - \frac{r^4\pi}{8}\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{r^4}{32}(\pi - 2\sqrt{2}) = T_{\min},$$

dagegen

$$J_\mu - J_{\min} = \frac{2r^4\pi}{32} - \frac{r^4}{32}(\pi - 2\sqrt{2}) = \frac{r^4}{32}(\pi + 2\sqrt{2}) = J_{\max}.$$

Diese Resultate werden sich später in einer allgemeinen Formel bestätigen.

152) Eine brauchbare Beziehung zwischen dem Trägheitsmoment und dem Centrifugalmoment ergiebt sich aus folgender Betrachtung.

Nach Nr. 133 ist für die um α und die um $\beta = \alpha + 90^0$ gegen die grofse Hauptachse geneigten Achsen

$$\varrho_\alpha^2 = \varrho_2^2 \sin^2\alpha + \varrho_1^2 \cos^2\alpha$$
$$\varrho_\beta^2 = \varrho_2^2 \cos^2\alpha + \varrho_1^2 \sin^2\alpha$$
$$\lambda^2 = (\varrho_2^2 - \varrho_1^2) \sin\alpha \cos\alpha.$$

Man bilde aus den beiden ersten Gleichungen durch Multiplikation eine neue, aus der dritten durch beiderseitige Quadrierung ebenfalls. Aus den neuen Gleichungen bilde man eine weitere durch beiderseitige Subtraktion. Dann erhält man

$$\begin{aligned}\varrho_\alpha^2 \varrho_\beta^2 - \lambda^4 &= \varrho_2^4 \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \varrho_2^2\varrho_1^2(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) + \varrho_1^4 \sin^2\alpha\cos^2\alpha \\ &\quad - \left[\varrho_2^4 \sin^2\alpha\cos^2\alpha - 2\varrho_2^2\varrho_1^2 \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \varrho_1^4 \sin^2\alpha\cos^2\alpha\right] \\ &= \varrho_1^2\varrho_2^2(\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) \\ &= \varrho_1^2\varrho_2^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = \varrho_1^2\varrho_2^2.\end{aligned}$$

Demnach ist

$$\lambda^4 = \varrho_\alpha^2\varrho_\beta^2 - \varrho_1^2\varrho_2^2$$

oder

$$\lambda^4 = (\varrho_\alpha\varrho_\beta)^2 - (\varrho_1\varrho_2)^2.$$

Daraus folgt z. B.

$$F^2\lambda^4 = F\varrho_\alpha^2 \cdot F\varrho_\beta^2 - F^2\varrho_1^2\varrho_2^2$$

oder

$$M_{xy}^2 = T_\alpha T_\beta - F^2\varrho_1^2\varrho_2^2.$$

Von der letzteren Beziehung soll später eine wichtige Anwendung gemacht werden.

153) Zu den rein mathematischen Aufgaben, die durch die Ergebnisse der vorstehenden Abschnitte lösbar geworden sind, gehören solche über ganz beliebig abgeschrägte Körper, z. B. folgende: Der Normalschnitt eines Körpers sei ein Halbkreis, der Körper werde durch eine ganz beliebige Ebene abgeschrägt. Sein Schwerpunkt soll bestimmt werden. Dasselbe ist für den Fall zu leisten, dafs er oben und unten durch ganz willkürlich geneigte Ebenen abgeschrägt wird. Aufgaben physikalischer Art wurden bereits mehrfach angedeutet.

Abschnitt V.

Einige Hülfsmittel der Elementar-Mathematik.

(Methode der unendlich dünnen Schichten.)

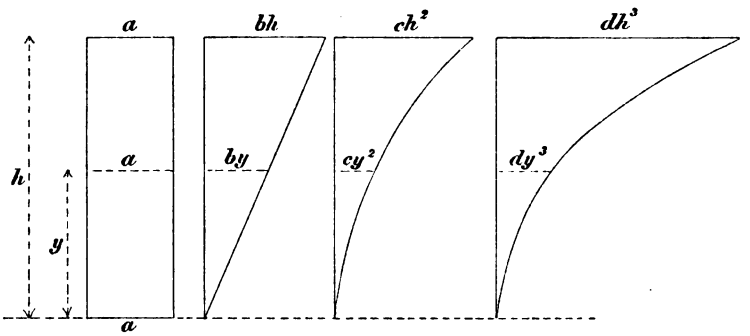
154) Bisher kamen nur mathematische Vorkenntnisse zur Anwendung, die auf sämtlichen höheren Schulen erworben werden können. (Höchstens die Guldinsche Formel ist hier und dort noch vom Gymnasium ausgeschlossen.) Von jetzt ab sollen Fortschritte dadurch erzielt werden, dafs auch die Newton-Simpsonsche Regel, die Schichtenformel oder Summenformel für ganze positive Exponenten und die Schichtenformel für gebrochene und für negative Exponenten zur Anwendung gelangen. In dem Methodischen Lehrbuche des Verfassers über die Elementarmathematik ist das Nötigste darüber gesagt, auch sind dort zahlreiche Beispiele gegeben, besonders im dritten Teile. Für Nichtbesitzer des Buches sei das Nötigste auch hier auszugsweise dargestellt. Jede der drei Formeln ist ein förmlicher Hebel der Elementarmathematik, mit dessen Hülfe weite Gebiete der Technik bezwungen werden können. Zum Schlufs soll noch die erweiterte Simpsonregel für angenäherte Berechnungen erörtert werden.

A. Die Newton-Simpsonsche Regel für Körper und Flächen und die Schichtenformel für Querschnitte bis zur dritten Ordnung.

155) Fig. 130 stellt den Aufrifs von vier Körpern gleicher Höhe dar. Der erste sei ein Prisma oder ein Cylinder, dessen Querschnittsfläche überall gleich a ist. Sein Inhalt ist ah. Der zweite sei ein Dreieckskörper, dessen Querschnittsfläche in jeder Höhe y gleich by sei, also in der Höhe h gleich bh. Sein Inhalt ist $\frac{bh^2}{2}$. Bei dem dritten nehme die Querschnittsfläche zu, wie bei einem geraden Kreiskegel oder einer geraden Pyramide, die auf die Spitze gestellt sind, d. h. die Querschnittsfläche soll proportional dem Quadrate der Höhe sein,

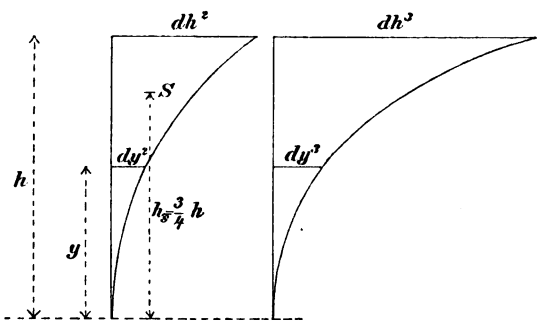
z. B. gleich cy^2 in jeder Höhe y, gleich ch^2 in der Höhe h. In der Zeichnung ist der Körper so gedacht, dafs er als gerade Säule über der Zeichnungsebene steht und zwar über der gezeichneten Fläche, die nach dem Früheren auf der einen Seite parabolisch begrenzt sein mufs. Der gezeichnete Körper, und der mit ihm verglichene Kegel, bezw. die mit ihm verglichene Pyramide haben sämtlich die Höhe h und die Grundfläche ch^2, ihre Querschnittsflächen sind in gleichen

Fig. 130.



Höhen inhaltsgleich, folglich stimmen nach Cavalieri auch die körperlichen Inhalte überein. Jeder ist also, wie die Pyramide, vom Inhalt $G\frac{h}{3}$ oder $\frac{ch^3}{3}$. (Die Parabel schneidet vom Rechteck den dritten Teil ab.) Bei dem vierten Körper sei die Querschnittsfläche proportional der 3ten Potenz der Höhe, und zwar soll den Höhen y und h bezw. dy^3 bezw. dh^3 entsprechen. Dafs er den Inhalt $\frac{dh^4}{4}$ hat, läfst sich folgendermafsen zeigen: Figur 131 stellt den dritten und vierten Körper noch einmal dar, nur ist beim dritten d statt c geschrieben.

Fig. 131.



Nach Cavalieri liegt bei dem letzteren der Schwerpunkt, wie bei der Pyramide, in der Höhe $\frac{3}{4}h$. Das statische Moment des Körpers in Bezug auf die Grundfläche ist also $M = J\frac{3}{4}h = \frac{dh^3}{3}\frac{3}{4}h = \frac{dh^4}{4}$.

Das statische Moment der Fläche dy^2 in Bezug auf die Grund-

fläche ist aber $dy^2 \cdot y = dy^3$, das der obersten Fläche $dh^2 \cdot h = dh^3$, und gerade so grofs sind die entsprechenden Querschnittsflächen des daneben stehenden Körpers. Weil nun die Mafszahlen für die Querschnittsflächen des letzteren ebenso grofs sind, wie die Mafszahlen der statischen Momente für die Flächen des vorigen, so mufs die Mafszahl für den Inhalt des letzten Körpers dieselbe sein, wie die Mafszahl für das statische Moment des vorigen, nämlich $\frac{dh^4}{4}$.

So hat man zunächst folgenden Satz:

Ist der Querschnitt eines Körpers in jeder Höhe y von der Form $q = a$, oder $q = by$, oder $q = cy^2$, oder $q = dy^3$, so ist der Inhalt von der Höhe 0 bis zur Höhe h genommen $J = ah$ bezw. $J = \frac{bh^2}{2}$, $J = \frac{ch^3}{3}$, $J = \frac{dh^4}{4}$. Es wird sich unten zeigen, dafs man ganz allgemein für jedes positive p sagen kann, zum Querschnitte $q = ky^p$ gehöre der Inhalt $J = \frac{kh^{p+1}}{p+1}$.

Weil jede von diesen Formeln durch Betrachtung der Querschnittsflächen oder besser der unendlich dünnen Schichten gewonnen wird, deren Summe den körperlichen Inhalt giebt, kann man jede als eine Schichtenformel oder Summenformel bezeichnen.

156) Was von den vier gezeichneten Körpern gilt, gilt auch von ihren Aufrifsflächen in Fig. 132. Also:

Ist die Querlinie einer ebenen Fläche in jeder Höhe y von der Länge $q = a$, oder $q = by$ oder $q = cy^2$ oder $q = dy^3$, so ist der Inhalt von der Höhe Null bis zur Höhe h genommen $F = ah$ bezw. $F = \frac{bh^2}{2}$, $F = \frac{ch^3}{3}$, $F = \frac{dh^4}{4}$.

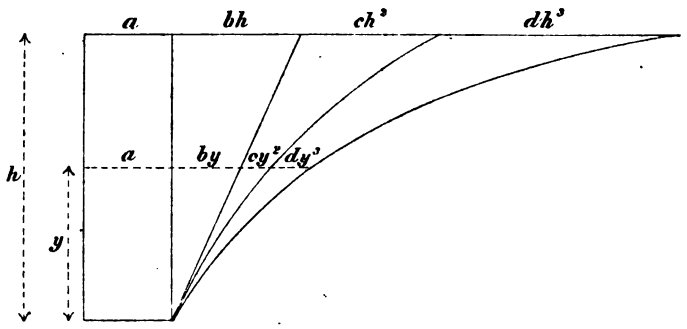
Mit anderen Worten: Die Parabel 0ter, 1ter, 2ter, 3ter Ordnung schneidet vom Rechteck den 1ten, 2ten, 3ten, 4ten Teil ab $\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$. Hier sind also zwei Gerade als Parabeln 0ter bezw. 1ter Ordnung bezeichnet worden.

Dies gilt auch dann, wenn man jeden Querschnitt in seinem Niveau irgendwie verschiebt. So kann z. B. die linke Grenzlinie auch eine schräge Gerade, oder eine Parabel 2ter oder 3ter Ordnung sein, an die sich dann die horizontalen Schnitte anzulegen haben. Dadurch wird nun die folgende Betrachtung ermöglicht.

157) Denkt man sich die in gleichen Höhen liegenden Schichten der vier Körper vereinigt, so entsteht ein Körper, dessen Querschnittsfläche in jeder Höhe y ist $q = a + by + cy^2 + dy^3$. Sein Inhalt aber mufs sein $J = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}$.

Nach Cavalieri muſs dieses Resultat allgemeine Geltung haben. So erhält man den

Fig. 132.



Satz: Hat ein Körper in jeder Höhe y den Querschnitt

1) $$q = a + by + cy^2 + dy^3,$$

so ist sein Inhalt von der Höhe Null bis zur Höhe h gerechnet

2) $$\overset{h}{\underset{0}{J}} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}.$$

158) Ebenso gilt der

Satz: Hat eine ebene Fläche in jeder Höhe y die Querlinie

1) $$q = a + by + cy^2 + dy^3,$$

so ist ihr Inhalt von der Höhe Null bis zur Höhe h gerechnet

2) $$\overset{h}{\underset{0}{F}} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}.$$

Jede Formel 2) soll als die Schichtenformel (Summenformel) für Körper bezw. Flächen bis zur dritten Ordnung bezeichnet werden.

159) Es läfst sich nun zeigen, dafs damit auch die Simpson-Newtonsche Regel bewiesen ist, welche lautet:

Hat ein Körper in jeder Höhe y die Querschnittsfläche

$$q = a + by + cy^2 + dy^3,$$

so ist sein Inhalt von der Höhe Null bis zur Höhe h berechnet

$$J = \frac{h}{6}[U + O + 4M],$$

wo U den Unterschnitt, O den Oberschnitt, M den Mittelschnitt bedeutet.

Beweis. In Fig. 132 ist der Unterschnitt, d. h. der Schnitt für die Höhe $y = 0$, $U = a$, der Oberschnitt $O = a + bh + ch^2 + dh^3$, der Mittelschnitt $M = a + b\frac{h}{2} + c\left(\frac{h}{2}\right)^2 + d\left(\frac{h}{3}\right)^3 = a + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{4} + \frac{dh^3}{8}$. Setzt man dies in $\frac{h}{6}[U + O + 4M]$ ein, so ergiebt sich

$$\frac{h}{6}\left[a + (a + bh + ch^2 + dh^3) + 4\left(a + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{4} + \frac{dh^3}{8}\right)\right]$$
$$= \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}.$$

Letzteres ist aber nach Nr. 157 der Inhalt J, folglich ist

$$\frac{h}{6}[U + O + 4M] = J.$$

160) Ebenso gilt für Flächen der Satz:

Hat eine Fläche in jeder Höhe y eine Querlinie von der Länge

$$q = a + by + cy^2 + dy^3,$$

so ist ihr Inhalt, von der Höhe Null bis zur Höhe h gerechnet,

$$F = \frac{h}{6}[u + o + 4m],$$

wo u die unterste, o die oberste, m die in halber Höhe liegende Querlinie bedeutet.

161) Selbstverständlich können bei beiden Sätzen beliebig viele der Faktoren a, b, c und d gleich Null sein. Demnach wird bald die Schichtenformel, bald die Simpsonsche Regel das Bequemere sein.

Während, wie sich zeigen wird, die Schichtenformel über die 3te Ordnung hinaus weiter gilt, ist dies bei der Simpsonregel nicht der Fall. Diese gilt z. B. nicht mehr für den Körper mit Querschnittsformel $q = dy^4$. Bei diesem würde sie geben

$$J = \frac{h}{6}\left[0 + dh^4 + 4\left(\frac{d}{2}\right)^4\right] = \frac{h}{6}\left[dh^4 + \frac{dh^4}{4}\right] = \frac{5}{24}dh^5,$$

was falsch ist, da nach der später zu beweisenden richtigen Formel $\frac{dh^5}{5}$ oder $\frac{5}{25}dh^5$ herauskommen müfste. Hier also könnte die Simpson-Newtonsche Regel höchstens als rohe Annäherungsformel gebraucht werden.

Sobald es sich um ganze positive Exponnenten handelt und in der Querschnittsformel der dritte Grad nicht überstiegen wird, kann die Simpsonsche Regel angewandt werden, sonst ist ihre Anwendung nicht zulässig.

162) Bezüglich der Summenformel ist noch Folgendes zu bemerken. Aus

$$\overset{h_2}{\underset{0}{F}} = \frac{ah_2}{1} + \frac{bh_2^2}{2} + \frac{ch_2^3}{3} + \frac{dh_2^4}{4}$$

und

$$\overset{h_1}{\underset{0}{F}} = \frac{ah_1}{1} + \frac{bh_1^2}{2} + \frac{ch_1^3}{3} + \frac{dh_1^4}{4}$$

folgt durch beiderseitige Subtraktion als Fläche von h_1 bis h_2

$$\overset{h_2}{\underset{h_1}{F}} = \frac{a(h_2 - h_1)}{1} + \frac{b(h_2^2 - h_1^2)}{2} + \frac{c(h_2^3 - h_1^3)}{3} + \frac{d(h_2^4 - h_1^4)}{4},$$

wofür man wohl auch abgekürzt schreibt

$$\overset{h_2}{\underset{h_1}{F}} = \left| \frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \frac{dy^4}{4} \right|_{y=h_1}^{y=h_2}.$$

Damit werden die Parallelschichten der entsprechenden Körper und Flächen in der Regel bequemer, als mit der Simpsonschen Regel, berechnet, weil bei dieser der Mittelschnitt besonderer Berechnung bedarf, die hier überflüssig ist.

Für die einfachen Parabeln bis zur dritten Ordnung sind die entsprechenden Inhaltsformeln:

$$\overset{h_2}{\underset{h_1}{F}} = a\frac{h_2 - h_1}{1}, \quad \overset{h_2}{\underset{h_1}{F}} = b\frac{h_2^2 - h_1^2}{2}, \quad \overset{h_2}{\underset{h_1}{F}} = c\frac{h_2^3 - h_1^3}{3}, \quad \overset{h_2}{\underset{h_1}{F}} = d\frac{h_2^4 - h_1^4}{4}.$$

163) Die Anwendungen auf Flächen sind znnächst von geringerer Bedeutung. Dagegen lassen sich, wie im 2ten und 3ten Bande des Methodischen Lehrbuchs gezeigt wird, zahlreiche Körper auf dem vorgeschlagenen Wege berechnen. Von dem Prisma, dem Dachkörper und der Pyramide abgesehen, handelt es sich z. B. um Pyramidenstumpf, Kegelstumpf, Prismatoid mit ebenen und windschiefen Seitenflächen, mit geradlinig oder krummlinig begrenzten Grundflächen, um die Kugel mit ihren Segmenten und Parallelschichten, das Drehungsellipsoid und dreiachsige Ellipsoid mit Segmenten und Parallelschichten, um die Parallelschichten des einmanteligen Drehungshyperboloids und des einmanteligen dreiachsigen Hyperboloids, um die Segmente und Schichten des zweimanteligen Hyperboloids und um einige Arten von Drehungsparaboloiden höherer Ordnung.

164) Die Formeln lassen aber noch anderweitige Deutungen zu. Ist

1) $$q = a + by + cy^2 + dy^3$$

das statische Moment des Flächen- oder Körperquerschnitts in Bezug auf die Basis, so ist

2) $$\overset{h}{\underset{0}{M}} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}$$

das gesamte statische Moment der Fläche, von 0 bis h genommen.

Ist 1) die Formel für das Trägheitsmoment der Fläche oder des Körpers in Bezug auf die Basis, so ist

3) $$\overset{h}{\underset{0}{T}} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}$$

das gesamte Trägheitsmoment in Bezug auf die Basis.

Ist 1) die Formel für den Querschnitt des Arbeitsdiagramms, bedeutet es also die Gröfse der Kraft an der Stelle y, so ist

4) $$\overset{h}{\underset{0}{A}} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}$$

die gesamte Arbeit längs des Weges 0 bis h.

Ist 1) das Gewicht des Querschnitts in der Höhe y, so ist das Gesamtgewicht

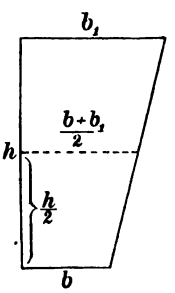
5) $$\overset{h}{\underset{0}{P}} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}.$$

165) Beispiel des Trapezes.

Der Querschnitt in Höhe y ist für das nebenstehende Trapez

1) $$x = b + \frac{b_1 - b}{h} y,$$

Fig. 132b.



wie sich aus der Zerlegung in Parallelogramm (Rechteck) und Dreieck ergiebt.

Das statische Moment des Querschnitts in Bezug auf die Grundlinie ist

2) $$xy = by + \frac{b_1 - b}{h} y^2,$$

das entsprechende Trägheitsmoment

3) $$xy^2 = by^2 + \frac{b_1 - b}{h} y^3.$$

Da keine dieser Querschnittsformeln den dritten Grad übersteigt, so darf auf sämtliche die Simpsonsche Formel angewandt werden. Die Fläche wird nach 1)

4) $$F = \frac{h}{6}\left[b + b_1 + 4\,\frac{b+b_1}{2}\right] = \frac{h}{6}\left[3b + 3b_1\right] = \frac{h}{2}(b + b_1).$$

Das statische Moment wird

5) $$M_u = \frac{h}{6}\left[b\cdot 0 + b_1 h + 4\,\frac{b+b_1}{2}\,\frac{h}{2}\right] = \frac{h^2}{6}\left[b_1 + (b+b_1)\right] = \frac{h^2}{6}(b+2b_1).$$

Das Trägheitsmoment der Fläche wird

6) $$T_u = \frac{h}{6}\left[b\cdot 0^2 + b_1 h^2 + 4\,\frac{b+b_1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2\right] = \frac{h^3}{6}\left[b_1 + \frac{b+b_1}{2}\right] = \frac{h^3}{12}[b+3b_1].$$

Daraus ergiebt sich die Schwerpunktshöhe

7) $$h_s = \frac{M_u}{F} = \frac{h\,(b+2b_1)}{3\,(b+b_1)},$$

der Trägheitsradius in Bezug auf die X-Achse

8) $$\varrho_x = \sqrt{\frac{T_u}{F}} = h\sqrt{\frac{b+3b}{6\,(b+b_1)}},$$

die Höhe des Schwingungspunktes bei Drehung um dieselbe Achse

9) $$h_m = \frac{T_u}{M_u} = \frac{h\,(b+3b_1)}{2\,(b+2b_1)}.$$

Einfacher würde die Summenformel aus 1) geben:

$$\int_0^h F = \frac{bh}{1} + \frac{b_1 - b}{h}\,\frac{h^2}{2} = h\,\frac{b+b_1}{2}.$$

Aus 2) würde folgen

$$M_u = \frac{bh^2}{2} + \frac{b_1 - b}{h}\,\frac{h^3}{3} = \frac{h^2}{6}(b+2b_1).$$

Aus 3) erhält man

$$T_u = \frac{bh^3}{3} + \frac{b_1 - b}{h}\,\frac{h^4}{4} = \frac{h^3}{12}(b+3b_1).$$

Das Centrifugalmoment in Bezug auf die Geraden b und h würde für den Querschnitt werden

10) $$\frac{x^2}{2}y = \frac{b^2}{2}y + 2\,\frac{b_1-b}{h}\,\frac{by^2}{2} + \frac{(b_1-b)^2}{h^2}\,\frac{y^3}{2} = \frac{b^2}{2}y + \frac{bb_1 - b^2}{h}y^2 + \frac{(b_1-b)^2}{h^2}\,\frac{y^3}{2}.$$

Da der dritte Grad nicht überstiegen wird, ließe sich auch hierauf die Simpsonformel anwenden. Sie würde geben

$$M_{xy} = \frac{h}{6}\left[\frac{b^2}{2}0 + \frac{b_1^2}{2}h + \frac{4}{2}\left(\frac{b+b_1}{2}\right)^2\frac{h}{2}\right] = \frac{h}{6}\left[\frac{b_1^2}{2}h + \frac{(b+b_1)^2 h}{4}\right]$$

$$= \frac{h^2}{24}\left[2b_1^2 + b^2 + 2bb_1 + b_1^2\right]$$

oder

11) $$M_{xy} = \frac{h^2}{24}\left[b^2 + 2bb_1 + 3b_1^2\right].$$

Die Schichtenformel würde geben

$$\frac{b^2h^2}{2\,2}+\frac{bb_1-b^2h^3}{h\quad 3}+\frac{(b_1-b)^2}{h^2}\frac{h^4}{2\cdot 4}=\frac{h^2}{24}\left[6b^2+8bb_1-8b^2+3b_1^2+3b^2-6bb_1\right]$$

oder

$$M_{xy}=\frac{h^2}{24}\left[b^2+2bb_1+3b_1^2\right].$$

166) Beispiel der Parabel $x=\frac{cy^2}{h^2}$.

Das statische Moment und das Trägheitsmoment des Querschnitts würde für die Grundfläche werden $\frac{cy^3}{h^2}$, $\frac{cy^4}{h^2}$, das Centrifugalmoment würde sein $\frac{x^2}{2}y=\frac{c^2y^4}{h^4}\frac{y}{2}=\frac{c^2y^5}{2h^4}$. Die Simpsonsche Regel ist also hier nur für die Berechnung der Fläche und des statischen Momentes zu gebrauchen, denn alles Übrige übersteigt den dritten Grad. Das Resultat würde werden

$$F=\frac{h}{6}\left[0+c+4\frac{c}{4}\right]=\frac{2}{3}ch;\quad M_u=\frac{h}{6}\left[0\cdot 0+ch+4\frac{c}{4}\frac{h}{2}\right]=\frac{ch^2}{4}.$$

Die übrigen Dinge können erst im Abschnitt B behandelt werden.

167) Die Gleichung einer Kurve sei

$$x^2=a+by+cy^2+dy^3.$$

Der durch Drehung um die Y-Achse aus ihr entstehende Körper hat die Querschnittsformel

$$q_y=x^2\pi=a\pi+b\pi y+c\pi y^2+d\pi y^3.$$

Da der dritte Grad nicht überstiegen wird, kann sowohl die Simpsonsche Regel als auch die Summenformel angewandt werden. Der Inhalt wird

$$J=\pi\left[\frac{ah}{1}+\frac{bh^2}{2}+\frac{ch^3}{3}+\frac{dh^4}{4}\right].$$

Im besonderen Falle $x^2=dy^3$ handelt es sich um die sogenannte semikubische oder Neilsche Parabel. Die allgemeinere Curve wird bisweilen als Neiloide bezeichnet, während andere den entsprechenden Drehungskörper mit dem Namen Neiloid belegen.

168) Ist die Gleichung von der Form

$$x^2=a+by+cy^2,$$

so erhält der Drehungskörper den Inhalt

$$J=\pi\left[\frac{ah}{1}+\frac{bh^2}{2}+\frac{ch^3}{3}\right].$$

Der Querschnitt hat in Bezug auf die Grundfläche das statische Moment

$$x^2y = \pi(ay + by^2 + cy^3),$$

demnach ist die Simpsonsche Regel anwendbar auf die Berechnung des statischen Momentes

$$M_u = \pi\left(\frac{ah^2}{2} + \frac{bh^3}{3} + \frac{ch^4}{4}\right).$$

Ist endlich die Curvengleichung von der Form

$$x^2 = a + by,$$

so läfst sich auch das Trägheitsmoment T_u des Drehungskörpers mit Hülfe jener Regel berechnen. Die Resultate werden

$$J = \pi\left(\frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2}\right), \quad M_u = \pi\left(\frac{ah^2}{2} + \frac{bh^3}{3}\right), \quad T_u = \pi\left(\frac{ah}{3} + \frac{bh^4}{4}\right).$$

Die angegebenen Beschränkungen, die z. B. die Anwendung auf das Trägheitsmoment der Kugel ausschliefsen, lassen die Ausdehnung der Schichtenformel auf höhere Potenzen als wünschenswert erscheinen. Diese soll in Abschnitt B. durchgeführt werden.

169) Noch sei darauf aufmerksam gemacht, dafs bei der Curvengleichung $x = \frac{1}{y}$ das statische Moment des Querschnitts

$$xy = \frac{1}{y}y = 1,$$

sein Trägheitsmoment $xy^2 = \frac{1}{y}y^2 = y$ wird, so dafs sich für die beiden letzten die Simpsonsche Regel anwenden läfst. Bei der Gleichung $x = \frac{1}{y^2}$, die dem Gravitationsgesetze entspricht, ist das Trägheitsmoment des Querschnitts der Diagrammkurve

$$xy^2 = \frac{1}{y^2} \cdot y^2 = 1$$

der entsprechenden Behandlung zugänglich.

170) Eine weitere Deutung ergiebt sich folgendermafsen:
Die Gleichung einer Kurve sei

$$x = k + \frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \frac{dy^4}{4}.$$

In der Höhe y hat sie eine Tangente, die gegen die Y-Achse eine gewisse Neigung α hat. Diese berechnet sich nach dem Anhange von Teil 3 des Methodischen Lehrbuchs Seite 132 nach der Formel

$$\tan\alpha = a + \frac{2by}{2} + \frac{3cy^2}{3} + \frac{4dy^3}{4}$$

oder nach

$$\tan\alpha = a + by + cy^2 + dy^3.$$

Folglich: Deutet man die Gleichung

1) $$q = a + by + cy^2 + dy^3$$

als die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels, den die geometrische Tangente einer gewissen Kurve in der Höhe y genommen gegen die Y-Achse hat, so ist die Gleichung der Kurve

$$x = \frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \frac{dy^4}{4}.$$

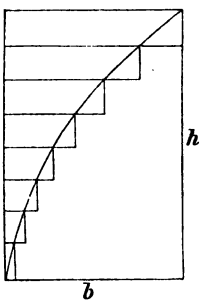
Hierzu kann aber noch eine Konstante k kommen, deren Gröfse nur von der Wahl des Niveaus für die X-Achse abhängt, die also für die Gestalt der Kurve ohne Bedeutung ist.

B. Die Schichtenformel für ganze positive Exponenten von beliebiger Gröfse.

171) Figur 133 stelle eine Parabel ganzzahliger Ordnung dar, die einem Rechteck mit den Seiten b und h einbeschrieben ist. Ihre Gleichung sei

$$x = \frac{b}{h^p} y^p,$$

Fig. 133.



was für $y = 0$ den Querschnitt 0, für $x = h$ den Querschnitt

$$\frac{b}{h^p} h^p = b$$

giebt, wie es nach der Figur auch sein mufs.

Man denke sich die Höhe h in n gleiche Teile zerlegt und durch die Teilpunkte Parallele gelegt. Die Streifen mögen, wie in der Figur, zu Rechtecken ergänzt werden. Jedes dieser Rechtecke hat die Höhe $\frac{h}{n}$, die Grundlinien aber sind nach der Formel $x = \frac{b}{h^p} y^p$ der Reihe nach

$$\frac{b}{h^p}\left(\frac{h}{n}\right)^p, \quad \frac{b}{h^p}\left(\frac{2h}{n}\right)^p, \quad \frac{b}{h^p}\left(\frac{3h}{n}\right)^p, \quad \cdots, \quad \frac{b}{h^p}\left(\frac{nh}{n}\right)^p$$

oder

$$\frac{1^p}{n^p} b, \quad \frac{2^p}{n^p} b, \quad \frac{3^p}{n^p} b, \quad \cdots, \quad \frac{n^p}{n^p} b,$$

so dafs die Summe der Rechtecksinhalte wird

$$\frac{h}{n}\frac{1^p}{n^p}b + \frac{h}{n}\frac{2^p}{n^p}b + \frac{h}{n}\frac{3^p}{n^p}b + \cdots + \frac{h}{n}\frac{n^p}{n^p}b$$

oder

$$\frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}\,bh.$$

Macht man nun n unendlich groſs, die Höhe der Streifen also unendlich klein, so fallen erstens die störenden Treppenräume weg, zweitens wird nach Band II des Methodischen Lehrbuchs, Arithm. Nr. 38,

$$\frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1} \qquad \text{für } n = \infty$$

und demnach wird die schraffierte Fläche von der Höhe 0 bis zur Höhe h

$$\overset{h}{\underset{0}{F}} = \frac{bh}{p+1}.$$

Also: Die Parabel p^{ter} Ordnung $x = \frac{b}{h^p}y^p$ schneidet von dem zugehörigen Rechteck den $(p+1)^{\text{ten}}$ Teil, d. h. die Fläche $\frac{bh}{p+1}$ ab.

Folglich: Die Parabel p^{ter} Ordnung $x = ky^p$ hat von der Höhe 0 bis zur Höhe h den Inhalt

$$\overset{h}{\underset{0}{F}} = k\frac{h^{p+1}}{p+1}.$$

Hier nämlich würde das Rechteck die Seiten h und kh^p, also den Inhalt kh^{p+1} haben, von dem der $(p+1)^{\text{te}}$ Teil abgeschnitten ist.

Dadurch bestätigen sich zunächst die schon vorher bis zur 3ten Ordnung gefundenen Resultate.

172) Durch Aneinandersetzen der Streifen parabolischer Flächen nach Art der Figur 132 erhält man folgende allgemeine Sätze:

Satz: Berechnet sich die Querlinie einer ebenen Fläche für jede Höhe y nach der Formel

$$x = a + by + cy^2 + dy^3 + \cdots + ky^p,$$

so ist ihr Inhalt, von der Höhe $y = 0$ bis zur Höhe $y = h$ gerechnet,

$$\overset{h}{\underset{0}{F}} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4} + \cdots + k\frac{h^{p+1}}{p+1}.$$

Satz: Berechnet sich die Querschnittsfläche eines Körpers für jede Höhe y nach der Formel

$$q = a + by + cy^2 + dy^3 + \cdots + ky^p$$

so ist sein Inhalt, von der Höhe $y = 0$ bis zur Höhe $y = h$ gerechnet,

$$\int_0^h J = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4} + \cdots + k\,\frac{h^{p+1}}{p+1}.$$

173) Durch diese Formel wird ein Bereich beherrscht, der weit über den der Simpsonschen Regel hinausgeht. Die Zahl der Glieder darf unter gewissen Bedingungen sogar bis ins Unendliche gehen.

Ist z. B. der Querschnitt durch folgende unendliche Reihe dargestellt

1) $$q_y = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \cdots \text{ in infinitum,}$$

so folgt daraus

2) $$\int_0^h J = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4} + \frac{eh^5}{5} + \cdots \text{ in infinitum,}$$

nur mufs der Konvergenzbereich beider Reihen eingehalten werden.

Die Formeln können auf alle Funktionen angewandt werden, die sich in konvergenten Potenzreihen entwickeln lassen.

Dies gilt z. B. von der geometrischen Reihe, also von der Kurve

$$x = \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \cdots \qquad \text{für } y \text{ absolut } < 1,$$

von der Exponentialreihe, also von der logarithmischen Linie

$$x = e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1\cdot 2} + \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots,$$

und zwar für jedes y; ferner von der logarithmischen Linie

$$x = {}^e\lg y = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} + \cdots \qquad \text{für } y \text{ absolut } < 1,$$

von der Kettenlinie

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = 1 + \frac{y^2}{1\cdot 2} + \frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{y^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots,$$

von der Sinuskurve

$$x = \sin y = \frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots,$$

von Kurven, deren Gleichung mit dem binomischen Lehrsatze zusammenhängt, wie

$$x = \sqrt{1+y} = (1+y)^{\frac{1}{2}}$$

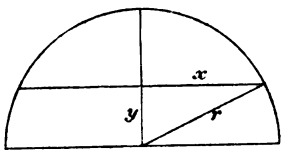
$$= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1}y + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}y^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}y^3 + \cdots$$

für y absolut < 1.

Diese Bemerkungen mögen vorläufig hinreichen, von der weitgehenden Bedeutung des Verfahrens ein Bild zu geben, denn die obigen Deutungen bleiben hier sämtlich erhalten. Einige Beispiele werden die Sache näher erläutern.

174) Anwendungen auf die Halbkugel und die ganze Kugel.

Fig. 134.



a) Inhaltsberechnung. Der Schnitt in Höhe y ist

$$q = x^2\pi = (r^2 - y^2)\,\pi = r^2\pi - y^2\pi .$$

Folglich: Inhalt der Schicht von 0 bis y_1 ist

$$\overset{h_1}{\underset{0}{J}} = \frac{r^2\pi y_1}{1} - \frac{\pi y_1^3}{3} = \frac{y_1\pi}{3}\left(r^2 - y_1^2\right),$$

Inhalt der Halbkugel

$$\overset{r}{\underset{0}{J}} = r^2\pi\,\frac{r_1}{1} - \pi\,\frac{r_1^3}{3} = \frac{2}{3}\,r^3\pi .$$

b) Das statische Moment in Bezug auf die Grundfläche. Die in Höhe y befindliche Schicht hatte die Fläche $x^2\pi$, die Multiplikation mit dem Abstande y giebt $x^2y\pi$ oder $(r^2 - y^2)\,y\pi = r^2\pi y - y^3\pi$. Aus

$$q = r^2\pi y - y^3\pi$$

folgt als statisches Moment der Schicht von 0 bis y_1

$$\overset{y_1}{\underset{0}{M}} = r^2\pi\,\frac{y_1^2}{2} - \pi\,\frac{y_1^4}{4} = \frac{y_1^2\pi}{4}\left(2r^2 - y_1^2\right).$$

Das statische Moment der Halbkugel für die Grundfläche ist

$$\overset{r}{\underset{0}{M}} = r^2\pi\,\frac{r^2}{2} - \pi\,\frac{r^4}{4} = \frac{r^4\pi}{4}.$$

c) Schwerpunktshöhe.
Die Schwerpunktshöhe der Schicht ist

$$h_s = \frac{\overset{y_1}{\underset{0}{M}}}{\overset{y_1}{\underset{0}{J}}} = \frac{\frac{y_1^2\pi}{4}\left(2r^2 - y_1^2\right)}{\frac{y_1\pi}{3}\left(r^2 - y_1^2\right)} = \frac{3\,y_1}{4}\,\frac{2r^2 - y_1^2}{r^2 - y_1^2}.$$

die Schwerpunktshöhe der Halbkugel

$$h_s = \frac{\overset{r}{\underset{0}{M}}}{\overset{r}{\underset{0}{J}}} = \frac{\frac{r^4\pi}{4}}{\frac{2}{3}\,r^3\pi} = \frac{3}{8}\,r .$$

d) Trägheitsmoment in Bezug auf die Grundfläche. Die Schicht in Höhe y ist mit y^2 zu multiplizieren, wenn man ihr Trägheitsmoment für die Grundfläche erhalten will. Dies giebt

$$q_y = x^2\pi y^2 = (r^2 - y^2)\,\pi y^2 = r^2\pi y^2 - \pi y^4.$$

Das Trägheitsmoment für die Schichten von 0 bis y_1 wird also

$$\overset{y_1}{\underset{0}{T}} = r^2\pi\,\frac{y_1^3}{3} - \pi\,\frac{y_1^5}{5} = \frac{y_1^3\pi}{15}\,(5r^2 - 3y_1^2).$$

Für die Halbkugel selbst wird es

$$\overset{r}{\underset{0}{T}} = r^2\pi\,\frac{r^3}{3} - \pi\,\frac{r^5}{5} = \tfrac{2}{15}\,r^5\pi.$$

e) Der entsprechende Trägheitsradius. Er bestimmt sich aus der Formel $y_t^2 J = T$, also wird er für die Schichten von 0 bis y_1

$$y_t = \sqrt{\frac{\overset{y_1}{\underset{0}{T}}}{\overset{y_1}{\underset{0}{J}}}} = \sqrt{\frac{\frac{y_1^3\pi}{15}\,(5r^2 - 3y_1^2)}{\frac{y_1\pi}{3}\,(r^2 - y_1^2)}} = \sqrt{\frac{3y_1^2\,(5r^2 - 3y_1^2)}{15\,(r^2 - y_1^2)}},$$

für die Halbkugel

$$y_t = \sqrt{\frac{\frac{2}{15}\,r^5\pi}{\frac{2}{3}\,r^3\pi}} = r\sqrt{\tfrac{1}{5}}.$$

e) Das Trägheitsmoment der ganzen Kugel in Bezug auf einen Hauptschnitt ist

$$T = \tfrac{4}{15}\,r^5\pi.$$

f) Das axiale Trägheitsmoment der Kugel in Bezug auf einen Durchmesser ist gleich der Summe zweier planen Trägheitsmomente (in Bezug auf zwei auf einander senkrechte Hauptschnitte), also

$$T_a = \tfrac{8}{15}\,r^5\pi = \left(\tfrac{4}{3}\,r^3\pi\right)\frac{2r^2}{5} = \frac{2r^2}{5}\,m,$$

wo m die Masse der Kugel bedeutet.

g) Der axiale Trägheitsradius wird

$$r_t = \sqrt{\frac{T_a}{J}} = \sqrt{\frac{\frac{8}{15}\,r^5\pi}{\frac{4}{3}\,r^3\pi}} = r\sqrt{\tfrac{2}{5}}.$$

h) Die Energie der homogenen sich drehenden Kugel ist

$$E = \frac{T\vartheta^2}{2} = \frac{2r^2}{5}\,m\,\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{mr^2\vartheta^2}{5},$$

wo m die Masse, ϑ die am Radius 1 gemessene Winkelgeschwindigkeit ist. Für den Erdball z. B. ist $T = \frac{8 r^5 \pi}{15} \frac{p'}{g}$, wo das spezifische Gewicht $p' = 5{,}6$, $g = 9{,}81$ m und $r = 860 \cdot 7500$ m angenommen werden kann. Die Umdrehungszeit ist 86 164 Sekunden (Sterntag, nicht Sonnentag von 86 400 Sek.), die Winkelgeschwindigkeit also $\vartheta = \frac{2\pi}{86\,164}$. Die Drehungsenergie ist daher $\frac{1}{2} \frac{8 r^5 \pi}{15} \frac{5{,}6}{9{,}81} \left(\frac{2\pi}{86\,164}\right)^2 = 28\,388 \cdot 10^{21}$ Metertonnen $= 28\,388 \cdot 10^{24}$ mkg. Division durch 425 giebt die in dieser Energie enthaltene Anzahl von Wärmeeinheiten, nämlich $66\,797 \cdot 10^{21}$ W.-E. Angenommen, der Sterntag wäre jetzt $\frac{1}{81}$ Sekunde länger als vor 2000 Jahren, so wäre die frühere Winkelgeschwindigkeit gewesen $\vartheta_1 = \frac{2\pi}{86\,163\frac{80}{81}} = \frac{6\,979\,284}{6\,979\,283}\vartheta$*), der Energieverlust also

$$28\,388 \cdot 10^{24} \frac{6\,979\,284^2 - 6\,979\,283^2}{6\,979\,283^2} = 81\,349 \cdot 10^{17} \text{ mkg.}$$

Man kann den mittleren Energieverlust innerhalb der 2000 Jahre auf die Sekunde reduzieren, indem man abgerundet durch $2000 \cdot 365{,}25 \cdot 86\,400$ dividiert. Er beträgt auf die Sekunde $12\,918 \cdot 10^7$ mkg. Division durch 75 giebt $17\,225 \cdot 10^5$ Pferdestärken, mit denen unter jener bekannten Annahme an der Verlangsamung der Erddrehung gearbeitet wird, und zwar besonders durch den Einfluss der Fluterscheinung. Bei konstanter Wirkung würden zur Erschöpfung der Drehungsenergie $2000 \frac{28\,388 \cdot 10^{21}}{81\,349 \cdot 10^{17}}$ oder etwa 7000 Millionen Jahre nötig sein (was mit der Probe $81 \cdot 86\,164$ zusammenstimmt), bei abnehmender Wirkung noch längere Zeit. Die Kleinlichkeit der technischen Masseinheiten im Verhältnis zu kosmischen Erscheinungen tritt bei diesem Übungsbeispiele in überraschender Weise hervor.

i) Die Energie der drehend und fortschreitend bewegten Kugel.

$$E = \frac{m v^2}{2} + \frac{T\vartheta^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{m r^2 \vartheta^2}{5} = \frac{m}{10}(5 v^2 + 2 r^2 \vartheta^2).$$

Man kann also z. B. die gesamte Energie der Erdkugel berechnen.

k) Die Energie der ohne Gleitung rollenden Kugel.

$$E = \frac{m v^2}{2} + \frac{T\vartheta^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{T\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{T v^2}{2 r^2}$$
$$= \frac{m v^2}{2} + \frac{2}{5} m r^2 \frac{v^2}{2 r^2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{1}{5} m v^2 = \frac{7}{10} m v^2.$$

*) Bei Thomson und Tait, deutsch von Helmholtz und Wertheim, steht irrtümlich $\frac{1}{2\,700\,000}$ statt $\frac{1}{7\,200\,000}$, so dass die Resultate dort ungenau werden.

l) Die Kugel als Pendel. Ist die Entfernung des Aufhängepunktes vom Mittelpunkte gleich e, so ist die Dauer kleiner Schwingungen

$$t = \pi\sqrt{\frac{T}{gM}},$$

wo $T = \frac{2}{5}mr^2 + e^2m$, $M = em$ ist. Der Schwingungspunkt hat vom Aufhängepunkte die Entfernung

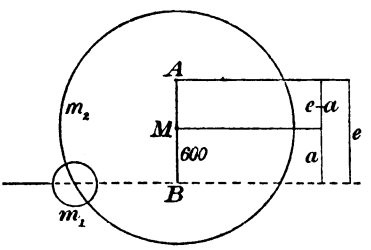
$$l = \frac{T}{M} = \frac{\frac{m}{5}(2r^2 + 5e^2)}{me} = \frac{2r^2 + 5e^2}{5e}.$$

(Reduzierte Pendellänge.)

175) Stofs gegen die Erdkugel.

Eine Kugel von der Gröfse und Masse der Erde werde von einem Weltkörper getroffen, dessen Masse der 1000ste Teil der Erdmasse ist und der mit 100000 m Geschwindigkeit gegen den stillstehend gedachten Erdball trifft, den er in einer Sehne schneiden würde, die vom Mittelpunkt die Entfernung 600 Meilen hat. Der Erdball habe einen Radius von 860 Meilen. Welche Bewegung tritt ein?

Fig. 135.



Auflösung. Nach der Stofstheorie ist die Entfernung der freiwilligen Drehungsachse für den Anfang der Bewegung in der Entfernung $BA = e = \frac{T_B}{M_B}$ zu suchen.

Das Trägheitsmoment der als homogen angenommenen Erdkugel für den Punkt B ist

$$T_B = \tfrac{2}{5}m_2r^2 + m_2a^2,$$

das statische Moment für denselben Punkt

$$M_B = m_2a;$$

demnach ist, da m_2 sich hebt, die Entfernung

$$BA = e = \frac{2r^2 + 5a^2}{5a}.$$

In B hat man sich eine Hülfsmasse zu denken, die in Bezug auf die Achse A dasselbe Trägheitsmoment hat wie die Kugel. Diese reduzierte Masse bestimmt sich aus der Gleichung

$$x e^2 = T_A$$

als

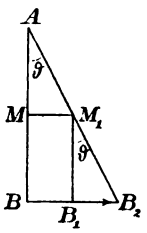
$$x = \frac{\frac{2}{5} m_2 r^2 + m_2 (e-a)^2}{e^2} = \frac{m_2}{5e^2}[2r^2 + 5(e-a)^2].$$

Jetzt handelt es sich bei B um den unelastischen Stofs zweier Massen m_1 und x mit den Geschwindigkeiten v_1 und $v_2 = 0$, so dafs die gemeinschaftliche Schlufsgeschwindigkeit bei B wird:

$$v_B = \frac{m_1 v_1 + x \cdot 0}{m_1 + x} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + x}.$$

Die Geschwindigkeit bei M wird kleiner im Verhältnis der von A aus gerechneten Abstände, d. h. die Schwerpunktsbewegung wird

Fig. 136.



$$v_s = v_B \frac{e-a}{e}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit ϑ für den Radius 1 wird

$$\vartheta = \frac{B_1 B_2}{M_1 B_1} = \frac{v_B - v_s}{a}.$$

Im Beispiele ergiebt sich

$$e = \frac{2r^2 + 5a^2}{5a} = \frac{2 \cdot 860^2 + 5 \cdot 600^2}{5 \cdot 600} = 1093{,}1 \text{ Meilen}; \quad e - a = 493{,}1 \text{ Meilen};$$

$$x = \frac{m_2}{5 \cdot 1093{,}1^2} \cdot [2 \cdot 860^2 + 5 \cdot 493{,}1^2] = 0{,}45108\, m_2 \text{ ist die Hülfsmasse.}$$

Die Geschwindigkeit bei B wird

$$v_B = \frac{\frac{m_2}{1000} \cdot v_1}{\frac{m_2}{1000} + x} = \frac{100\,000}{452{,}08} = 221{,}2 \text{ m},$$

demnach erhält der Erdball die fortschreitende Bewegung

$$v_s = 221{,}2 \, \frac{493{,}1}{1093{,}1} = 99{,}785 \text{ m}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit endlich wird

$$\frac{221{,}2 - 96{,}785}{600 \cdot 7500} = 0{,}000269.$$

An der Stelle B ist der Kreisumfang gleich $2 \cdot 600 \cdot 7500 \cdot \pi$ Meter $= 9\,000\,000\,\pi$ Meter. Dies, dividiert durch $v_B - v_s = 121{,}42$ m, giebt eine Umlaufszeit von 232 870 Sek. oder etwa 3 Tagen.

Die verlorene Arbeitswucht (Energie) bei diesem Stofse beträgt $\frac{m_1 x}{m_1 + x} \cdot \frac{(v_1 - 0)^2}{2}$ mkg, wo $x = 0{,}45108\, m_2$ und m_2 bei dem spez. Gew. 5,6 der Erde gleich $\frac{\frac{4}{3} (860 \cdot 7500)^3 \pi \cdot 1000 \cdot 5{,}6}{9{,}81}$ ist, so dafs der Verlust an Arbeitswucht

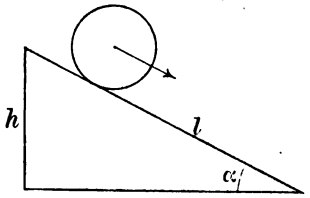
$$\frac{\frac{4}{3}(860 \cdot 7500)^3 \pi \cdot 1000 \cdot 5{,}6}{9{,}81} \cdot \frac{0{,}45108}{452{,}08} \cdot \frac{100000^2}{2} = \frac{m_2 \cdot 0{,}45108 \cdot 10\,000^2}{452{,}08 \cdot 2}$$

ist. Ein Teil dieser Arbeitswucht wird auf Umformung (Zerstörungsarbeit) verwendet, ein Teil in Wärme verwandelt. Angenommen, alles würde in Wärme übergehen, so würde durch $425 \cdot m_2$ zu dividieren sein*), wenn man die Anzahl der Wärmeeinheiten für die Masseneinheit erhalten will, durch $425 \cdot m_2 \cdot 9{,}81$, wenn man die Wärmeeinheiten für jedes Kilogramm finden will. Letzteres ergiebt rund 500 000 W.-E. Irgend ein Bruchteil derselben tritt als Erwärmung, der Rest als Zerstörungsarbeit auf. Um welchen Bruchteil es sich handelt, das hängt zum Teil von den chemischen Verhältnissen des Erdkörpers ab.

Nimmt man an, die Himmelskörper wären durch allmähliches Zusammenstürzen kosmischer Massen entstanden, so würde sich ihre fortschreitende Bewegung nebst der Drehung auf solche Weise ganz zwanglos erklären. Das mehrfach beobachtete plötzliche Aufleuchten neuer Fixsterne, deren Lichtstärke allmählich wieder abnimmt, deutet auf solche mit Wärmeentwickelung verbundene Zusammenstöfse hin.

Hatte der Erdkörper bereits eine Drehung um eine Achse, so würde in bekannter Weise diese einzusetzen sein. Nach der Poinsotschen Drehungstheorie könnte man ermitteln, welche Änderung die Drehungsbewegung unserer Erde durch einen solchen Stofs erhalten und welche neue Lage die Drehungsachse einnehmen würde. Das Problem läfst sich dahin spezialisieren, dafs man die Erde als Drehungsellipsoid annimmt, wobei die neue Achse keine von den freien Umdrehungsachsen zu werden braucht. Dies würde nicht nur auf Schwankungen (Nutation) der neuen Erdachse, sondern auch auf das Bestreben hinführen, ein neues „Geoid" zu bilden; die Verteilung der Ozeane würde eine andere werden u. s. w. Kurz, eine ganze Reihe weiterer Probleme der Mechanik und Potentialtheorie würde sich aufdrängen.

Fig. 137.



176) **Aufgabe.** Auf einer schiefen Ebene von Neigung α rolle eine Kugel ohne zu gleiten herab. Wie geschieht die Bewegung ohne weitere Berücksichtigung der Reibung?

*) Die obige Ausrechnung von m_2 ist unterlassen, weil, wenn man hier durch m_2 statt durch $1{,}001\, m_2$ dividiert, m_2 sich weghebt, so dass es sich nur um den Bruch

$$\frac{0{,}45108 \cdot 10^{10}}{452{,}08 \cdot 2 \cdot 9{,}81}$$

handelt.

Auflösung. Arbeit der Schwerkraft ph gleich der Energie

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{T\vartheta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{T\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{7}{10}mv^2$$

zu setzen, oder

$$mgh = \frac{7}{10}mv^2, \quad v = \sqrt{\frac{10gh}{7}} = \sqrt{2g_1h} = \sqrt{2g_1l\sin\alpha},$$

also Beschleunigung $g_1 = \frac{5}{7}g\sin\alpha$.

177) **Aufgabe.** Wie grofs würde die Zunahme der Erddrehung sein, wenn sich die Erde vom Radius r auf den Radius r_1 zusammenzöge?

Auflösung. Das Trägheitsmoment $T = \frac{2}{5}mr^2$ würde übergehen in $T_1 = \frac{2}{5}mr_1^2$, die Winkelgeschwindigkeit ϑ in die zu berechnende ϑ_1. Nimmt man an, die Drehungsenergie bliebe unverändert, was ziemlich wahrscheinlich ist, so hat man zu setzen:

$$\frac{T_1\vartheta_1^2}{2} = \frac{T\vartheta^2}{2}$$

oder

$$\frac{2}{5}mr_1^2 \cdot \frac{\vartheta_1^2}{2} = \frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{\vartheta^2}{2},$$

woraus folgt:

$$\vartheta_1 = \frac{r}{r_1}\vartheta,$$

d. h. die Winkelgeschwindigkeit wächst mit dem Verhältnisse $\frac{r}{r_1}$. Aus $r\vartheta = r_1\vartheta_1$ folgt zugleich, dafs die Äquatorialgeschwindigkeit unverändert bleibt. Dasselbe gilt unter einer einfachen Annahme von jedem Massenteilchen.

Die Centrifugalkraft am Äquator geht für die Masseneinheit von $\varkappa = r\vartheta^2$ über in $\varkappa_1 = r_1\vartheta_1^2 = r_1\frac{r^2}{r_1^2}\vartheta^2 = \frac{r}{r_1}(r\vartheta^2) = \frac{r}{r_1}\varkappa$, d. h. sie wächst ebenfalls mit dem Verhältnisse $\frac{r}{r_1}$.

Daraus folgern nun zahlreiche Anhänger der Laplaceschen Hypothese über die Bildung des Sonnensystemes, dafs die Abplattung des rotierenden Körpers gleichfalls wachsen müsse. Dies ist aber falsch. Es ist nämlich zu berücksichtigen, dafs gleichzeitig die Schwerkraft auf der Kugelfläche in dem stärkeren Verhältnisse $\frac{r^2}{r_1^2}$ zunimmt, dafs z. B. bei der Erde die Freifallbeschleunigung g in $g\cdot\frac{r^2}{r_1^2}$

übergeht. Der sogenannte Abplattungsfaktor $\frac{\varkappa}{g} = \frac{r\vartheta^2}{g}$ (der nicht etwa das Mafs der Abplattung selbst angiebt, und dessen Betrag für die Erde etwa $\frac{1}{290}$ ist) geht über in $\frac{\varkappa_1}{g_1} = \frac{r}{r_1}\varkappa \cdot \frac{1}{g} \cdot \frac{r_1^2}{r^2} = \frac{\varkappa r_1}{gr}$, d. h. der Abplattungsfaktor nimmt ab im Verhältnisse der beiden Radien, er nimmt nicht zu.

178) Allgemeine Folgerungen.

Eine Fläche habe die Querschnittsformel

1) $$x = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \cdots.$$

Ist die Reihe unendlich lang, so mufs die Betrachtung auf den Konvergenzbereich beschränkt werden, während bei endlicher Reihe Einschränkungen nicht nötig sind. Der Inhalt von 0 bis y wird

2) $$\overset{y}{\underset{0}{F}} = \frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \frac{dy^4}{4} + \frac{ey^5}{5} + \cdots.$$

Das statische Moment des Streifens 1) in Bezug auf die X-Achse ist

$$xy = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \cdots,$$

das entsprechenden Moment der Gesamtfläche also

3) $$M_x = \frac{ay^2}{2} + \frac{by^3}{3} + \frac{cy^4}{4} + \frac{dy^5}{5} + \frac{ey^6}{6} + \cdots.$$

Daraus folgt die Schwerpunktshöhe

4) $$y_s = \frac{M_x}{F} = \frac{\frac{ay^2}{2} + \frac{by^3}{3} + \frac{cy^4}{4} + \cdots}{\frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \cdots}.$$

Das Trägheitsmoment des Streifens 1) in Bezug auf die X-Achse ist

$$xy^2 = ay^2 + by^3 + cy^4 + dy^5 + \cdots,$$

das entsprechende Trägheitsmoment der Gesamtfläche also

5) $$T_x = \frac{ay^3}{3} + \frac{by^4}{4} + \frac{cy^5}{5} + \frac{dy^6}{6} + \cdots.$$

Für die horizontale Schwerpunktsachse ist es

6) $$T_s = T_x - y_s^2 F = T_x - \frac{M_x^2}{F^2}F = T_x - \frac{M_x^2}{F}.$$

Der Trägheitsradius in Bezug auf die X-Achse bestimmt sich aus

7) $$\varrho_x^2 = \frac{T_x}{F} = \frac{\frac{ay^3}{3} + \frac{by^4}{4} + \frac{cy^5}{5} + \cdots}{\frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \cdots}.$$

Der Schwingungspunkt in Bezug auf die X-Achse liegt für die Fläche in der Entfernung

8) $$\lambda_x = \frac{T_x}{M_x} = \frac{\frac{ay^3}{3} + \frac{by^4}{4} + \frac{cy^5}{5} + \cdots}{\frac{ay^2}{2} + \frac{by^3}{3} + \frac{cy^4}{4} + \cdots}.$$

Das Centrifugalmoment des Streifens 1) in Bezug auf die Koordinatenachsen ist, wenn die Abstände x sich direkt an die Y-Achse ansetzen und im ersten Quadranten bleiben:

$$\frac{x^2}{2}y = \frac{a^2}{2}y + \frac{2ab}{2}y^2 + \frac{b^2+2ac}{2}y^3 + \frac{2ad+2bc}{2}y^4 + \frac{c^2+2ae+2bd}{2}y^5 + \cdots$$

Dies ergiebt sich aus beiderseitiger Quadrierung von 1) und darauf folgender Multiplikation mit $\frac{y}{2}$. (Ist die erste Bedingung nicht erfüllt, so erledigt sich die Sache durch Subtraktion.) Folglich ist das Centrifugalmoment der Fläche

$$M_{xy} = \frac{a^2y^2}{2\,2} + \frac{2ab}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{b^2+2ac}{2}\frac{y^4}{4} + \frac{2ad+2bc}{2}\frac{y^5}{5} + \frac{c^2+2ae+2bd}{2}\frac{y^6}{6} + \cdots$$

Übersichtlicher ist es für geringere Gliederzahl, z. B. für $x = a + by + cy^2$. Dann ergiebt sich für den Streifen

$$\frac{x^2}{2}y = \frac{a^2}{2}y + \frac{2ab}{2}y^2 + \frac{b^2+2ac}{2}y^3 + \frac{2bc}{2}y^4 + \frac{c^2}{2}y^5,$$

folglich für die Fläche

$$M_{xy} = \frac{a^2y^2}{2\,2} + \frac{2ab}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{b^2+2ac}{2}\frac{y^4}{4} + \frac{2bc}{2}\frac{y^5}{5} + \frac{c^2}{2}\frac{y^6}{6}.$$

Der durch Drehung der Fläche um die Y-Achse entstehende Körper hat die Querschnittsformel

$$q_y = x^2\pi = \pi\,[a^2 + 2aby + (b^2 + 2ac)\,y^2 + (2bc + 2ad)\,y^3 + (c^2 + 2ae + 2bd)\,y^4 + \cdots].$$

Sein Inhalt bis zur Höhe y wird daher

$$J = \pi\left[\frac{a^2y}{1} + 2ab\,\frac{y^2}{2} + (b^2 + 2ac)\,\frac{y^3}{3} + (2bc + 2ad)\,\frac{y^4}{4} + (c^2 + 2ae + 2bd)\,\frac{y^5}{5} + \cdots\right].$$

Die Formel für das statische Moment des Querschnitts in Bezug auf die Grundfläche, d. h. für $x^2\pi y$, ist leicht aufzustellen, ebenso das Trägheitsmoment, und so kann man diese Ausdrücke auch für den Drehungskörper leicht hinschreiben und die entsprechenden Schlüsse ziehen.

Ist 1) der Querschnitt eines Körpers, so gelten die Formeln 2) bis 6) in Bezug auf die Ebene, von der aus die y gerechnet werden.

Um die obigen Betrachtungen für die Y-Achse zu wiederholen, mufs man y durch x ausdrücken, was auf Irrationalitäten und auf gebrochene Exponenten führt. Daher mufs für solche das Nötigste gesagt werden.

C. Die Parabeln gebrochener und negativer Ordnung und die Schichtenformel für gebrochene und negative Exponenten.

179) Oben war gezeigt worden, dafs die Parabel p^{ter} Ordnung $x = y^p$, wenn p ganz ist, von dem Rechteck mit den Seiten h und $b = h^p$ den $(p+1)^{\text{ten}}$ Teil abschneidet, so dafs die Fläche gleich $\frac{h^{p+1}}{p+1}$ ist. Die Fläche von h_1 bis h_2 würde sein

$$\overset{h_2}{F}_{h_1} = \frac{h_2^{p+1} - h_1^{p+1}}{p+1}.$$

Es fragt sich, was davon richtig bleibt, wenn p auch gebrochene und negative Werte annimmt.

Die Betrachtung soll auf den ersten Quadranten eingeschränkt werden, da sich die übrigen ebenso behandeln lassen und gerade in der Y-Achse die kritische Stelle liegt, die Zweifel bringen könnte.

Es handle sich also um die Kurve $x = y^\alpha$, wo α lediglich der Bedingung gehorchen soll, reell zu sein. Im Methodischen Lehrbuche, Band 3,

Fig. 138

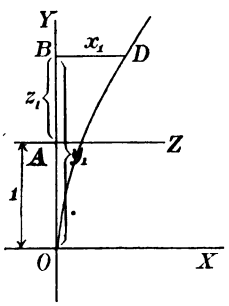
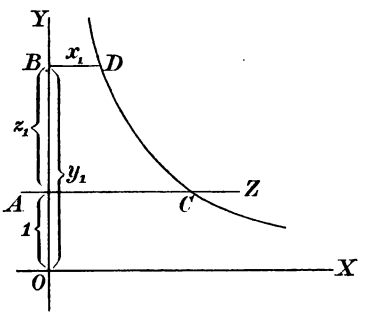


Fig. 139.



Algebr. Analysis V, ist dieser Fall behandelt worden; hier soll die Behandlung auf andere Weise geschehen. Zunächst ist zu bemerken, dafs bei positivem α die Kurve von O aus aufsteigt, und zwar bis zu unendlicher Höhe, dafs sie dagegen bei negativem α aus unendlicher Höhe bis zu Null herabsinkt. Welcher Fall vorliegt, ist vorläufig gleichgültig.

Es kommt darauf an, an Stelle von $x = y^\alpha$ eine Reihe zu erhalten, die nach ganzen positiven Potenzen fortschreitet. Zu

diesem Zwecke hat man nur nötig, das Koordinatensystem zu verschieben, z. B. den Nullpunkt in senkrechter Richtung von O nach A zu verlegen, wobei z. B. $OA = 1$ sein soll. In diesem Sonderfalle wird die neue Ordinate $z = y - 1$, (also $y = z + 1$), während x unverändert bleibt. Nach dem binomischen Satze für gebrochene und negative Exponenten, dessen Beweis man im dritten Bande des Meth. Lehrbuchs findet, ist dann die neue Kurvengleichung

$$x = (1 + z)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1} z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \cdots,$$

eine Reihe, die Geltung hat für $1 - < z < + 1$, so dafs man sich zunächst innerhalb dieses Konvergenzbereiches zu halten hat.

Nach der Schichtenformel ist dann

$$\overset{z_1}{\underset{0}{F}} = \frac{z_1}{1} + \frac{\alpha}{1}\frac{z_1^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2}\frac{z_1^3}{3} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{z_1^4}{4} + \cdots.$$

Um rechts wieder eine binomische Reihe zu erhalten, multipliziere man beiderseits mit $(\alpha + 1)$ und addiere beiderseits 1. Dies giebt

$$1 + (\alpha + 1) \cdot \overset{z_1}{\underset{0}{F}} = 1 + \frac{\alpha+1}{1} z_1 + \frac{(\alpha+1)\alpha}{1 \cdot 2} z_1^2 + \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z_1^3 + \cdots$$
$$= (1 + z_1)^{\alpha+1},$$

so dafs sich ergiebt

$$\overset{z_1}{\underset{0}{F}} = \frac{(1 + z_1)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} - \frac{1}{\alpha + 1},$$

folglich, wenn man zum alten Koordinatensystem zurückkehrt,

$$\overset{y_1}{\underset{1}{F}} = \frac{y_1^{\alpha+1}}{\alpha + 1} - \frac{1}{\alpha + 1}.$$

Bildet man dieselbe Formel für $\overset{y_2}{\underset{1}{F}}$, so findet man durch beiderseitige Subtraktion, wobei der Zusatz $\frac{1}{\alpha+1}$ sich weghebt,

1) $$\overset{y_2}{\underset{y_1}{F}} = \frac{y_2^{\alpha+1} - y_1^{\alpha+1}}{\alpha + 1},$$

so dafs die ursprüngliche, für positive, ganze Exponenten geltende Formel für den Konvergenzbereich als bestehen bleibend nachgewiesen ist. Nur der Fall $\alpha = -1$ ist auszuschliefsen, weil er auf den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ führt. Dieser Fall ist mit Hülfe des natürlichen Logarithmus zu erledigen. (Method. Lehrbuch Band 3, Algebr. Analysis II.)

180) Der Konvergenzbereich kann aber durch beliebige Verschiebung des Koordinatensystems beliebig geändert werden.

Verschiebung um die Strecke 2 würde z. B. die Kurvengleichung geben:

$$x = y^\alpha = (2 + z)^\alpha = 2^\alpha \left(1 + \frac{z}{2}\right)^\alpha,$$

oder

$$x = 2^\alpha \left[1 + \frac{\alpha}{1}\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{z}{2}\right)^3 + \cdots\right],$$

die für $\frac{z}{2}$ absolut < 1 oder z absolut < 2 konvergiert. Die Schichtenformel giebt jetzt

$$\overset{z_1}{\underset{0}{F}} = 2^\alpha \left[\frac{z}{1} + \frac{\alpha}{1}\left(\frac{1}{2}\frac{z^2}{2}\right) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{4}\frac{z^3}{3}\right) + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{8}\frac{z^4}{4}\right) + \cdots\right].$$

Rechts und links multipliziere man mit $(\alpha + 1)$ und aufserdem auf der rechten Seite oben und unten mit 2. Man erhält

$$(\alpha+1)\overset{z_1}{\underset{0}{F}} = 2^{\alpha+1}\left[\frac{\alpha+1}{1}\frac{z_1}{2} + \frac{(\alpha+1)\alpha}{1\cdot 2}\left(\frac{z_1}{2}\right)^2 + \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{z_1}{2}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$= 2^{\alpha+1}\left[\left(1 + \frac{z_1}{2}\right)^{\alpha+1} - 1\right],$$

so dafs

$$\overset{z_1}{\underset{0}{F}} = \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left[\left(1 + \frac{z_1}{2}\right)^{\alpha+1} - 1\right] = \frac{1}{\alpha+1}\left[(2 + z_1)^{\alpha+1} - 2^{\alpha+1}\right]$$

und daher auch

$$\overset{y_1}{\underset{2}{F}} = \frac{1}{\alpha+1}\left[y_1^{\alpha+1} - 2^{\alpha+1}\right]$$

ist. Daraus folgt ebenso, wie oben, mit Hülfe von $\overset{y_2}{\underset{2}{F}}$ und beiderseitiger Subtraktion

1) $$\overset{y_2}{\underset{y_1}{F}} = \frac{y_2^{\alpha+1} - y_1^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Die Formel 1) gilt also auch für den neuen Konvergenzbereich. Man kann auf diese Weise ihre Gültigkeit für die ganze positive reelle Achse nachweisen, vorausgesetzt, dafs α verschieden von -1 ist.

181) Kritisch sind nur die Stellen 0 und ∞. Darüber ist Folgendes zu sagen.

Ist $\alpha > -1$, so ist für $y_1 = 0$ der Werth von $\frac{y_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} = 0$. In diesem Falle wird

$$\overset{y_2}{\underset{0}{F}} = \frac{y_2^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{0}{\alpha+1} = \frac{y_2^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Folglich:

Für $\alpha > -1$ schneiden die Kurven den $(\alpha+1)^{\text{ten}}$ Teil des Rechtecks ab, möge nun α positiv (Fig. 140) oder negativ (Fig. 141) sein. So ist z. B. für $\alpha = -\frac{1}{2}$, also für die Kurve $x = y^{-\frac{1}{2}}$,

$$\overset{y}{\underset{0}{F}} = \frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2y^{\frac{1}{2}},$$

was das Doppelte des Rechtecks bedeutet. Das Diagramm reicht dabei nach rechts bis $x = \infty$ und hat trotzdem endlichen Inhalt.

Fig. 140.

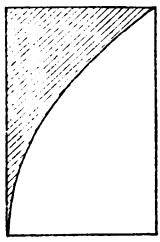
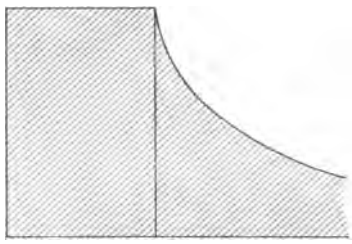
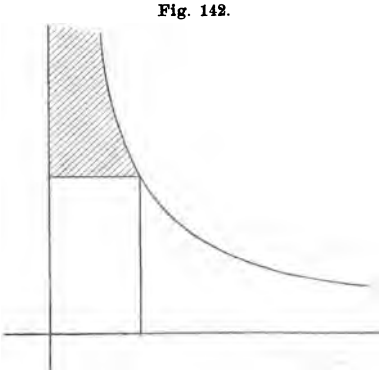


Fig. 141.



Ist dagegen $\alpha < -1$, so ist für $y_2 = \infty$ $y_2^{\alpha+1} = 0$, weil $\alpha + 1$ negativ ist, und die Formel geht über in

Fig. 142.



$$\overset{\infty}{\underset{y_1}{F}} = \frac{0}{\alpha+1} - \frac{y_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{-y_1^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

was positiv ist, weil der Nenner negativ ist. In diesem Falle ist also der nach oben bis ins Unendliche fortzusetzende schraffierte Flächenteil gleich dem $(\alpha+1)^{\text{ten}}$ Teil des Rechtecks, während der darunterliegende unendlich grofs werden würde. Also auch hier behält der Ausdruck: „$(\alpha+1)^{\text{ter}}$ Teil des Rechtecks“ einen bestimmten Sinn. Die Formel 1) aber bleibt für alle positiven y_1 und y_2 richtig, nur ist der Werth Null jetzt auszuschliefsen, denn das nach rechts gehende Diagramm ist jetzt von unendlich grofsem Inhalte.

182) Der Fall $\alpha = -1$ erledigt sich nach dem Meth. Lehrbuche Band 3, Algebr. Analysis II dadurch, dafs für die Kurve $x = \frac{1}{y}$

$$\int_0^y \frac{dy}{y} = {}^e\lg y$$

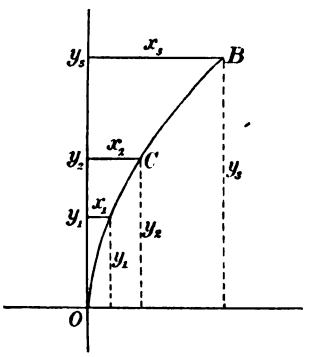
wird.

Damit ist die Angelegenheit für technische Zwecke überhaupt geklärt und ein weiterer Bereich für wichtige Anwendungen erschlossen.

183) Konstruktion der Parabeln höherer Ordnung.

Die Curven $x = y^\alpha$ für beliebiges reelles α einschliefslich des Falles $\alpha = -1$ haben eine einfache Konstruktionsmethode, die sich aus Folgendem ergiebt:

Fig. 143.



Ist x_2 mittlere Proportionale zu x_1 und x_3, also

$$x_1 : x_2 = x_2 : x_3,$$

so folgt aus der Kurvengleichung, dafs

$$y_1^\alpha : y_2^\alpha = y_2^\alpha : y_3^\alpha,$$

folglich auch

$$y_1 : y_2 = y_2 : y_3$$

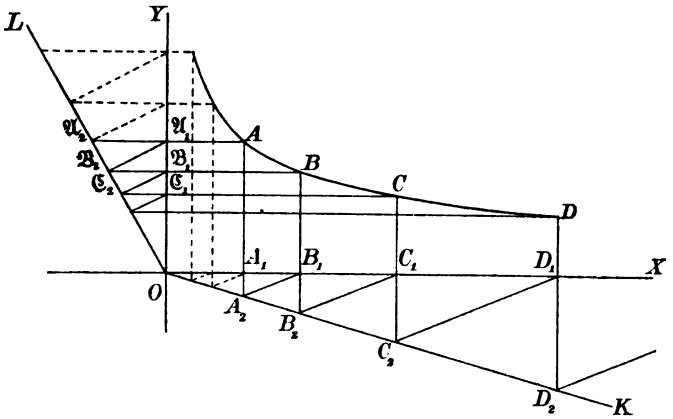
ist. Also: Ist die mittlere Abscisse mittlere Proportionale zwischen den aufsenliegenden Abscissen, so ist auch die mittlere Ordinate mittlere Proportionale zwischen den aufsenliegenden Ordinaten.

Sind also von einer Parabel $x = y^\alpha$ zwei Punkte A und B bekannt, so kann man durch Eintragen mittlerer Proportionalen einen dritten Punkt C konstruieren, sodann zwischen A und C, C und B ebenfalls neue Punkte einschalten u. s. w.

Auch nach aufsen läfst sich die Curve fortsetzen. Da es sich dann um ein Fortschreiten nach geometrischer Weise handelt, so ergiebt sich folgender Konstruktionsmechanismus.

Sind in Fig. 144 A und B gegeben, so ziehe man beliebig OK und bilde durch Projektion AA_1A_2 und BB_1B_2. Zieht man A_2B_1, sodann parallel dazu B_2C_1, darauf im Zickzack C_1C_2, $C_2D_1 \parallel A_2B_1$, D_1D_2, $D_2E_1 \parallel A_2B_1$ u. s. w., so erhält man die in geometrischer Weise aufeinander folgenden Abscissen. Ebenso verfahre man in Bezug auf die beliebige Gerade OL mit $A\,\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, $B\,\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ u. s. w., was die Ordinaten $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$ u. s. w. giebt. Dadurch werden Punkte $C, D, E \ldots$ der Kurve bestimmt, die auch rückwärts fortgesetzt werden kann.

Fig. 144.



184) So ist man im Stande, jede Parabel höherer Ordnung leicht zu konstruieren, z. B. auch die gleichseitige Hyperbel (Diagrammcurve für das Mariottesche Gesetz) und die adiabatischen Diagrammcurven

$$y = x^{-1,41} \quad \text{und} \quad y = x^{-1,125} = x^{-\frac{9}{8}}$$

für atmosphärische Luft und gesättigte Wasserdämpfe.

Die Diagrammflächen für die letztern ergeben sich nach Obigem als

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{x_2^{-1,41+1} - x_1^{-1,41+1}}{-1,41+1} = \frac{x_2^{-0,41} - x_1^{-0,41}}{-0,41} = \frac{x_1^{-0,41} - x_2^{-0,41}}{0,41},$$

bezw.

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{x_2^{-\frac{9}{8}+1} - x_1^{-\frac{9}{8}+1}}{-\frac{9}{8}+1} = \frac{x_2^{\frac{1}{8}} - x_1^{\frac{1}{8}}}{-\frac{1}{8}} = 8\left(x_1^{\frac{1}{8}} - x_2^{\frac{1}{8}}\right),$$

sodafs sich die Diagramme für die Expansionsarbeit und Kompressionsarbeit leicht berechnen lassen. (Vergl. Meth. Lehrbuch, Teil 3, Algebr. Anal. V, d.)

185) Dasselbe gilt von der Newtonschen Gravitationskurve

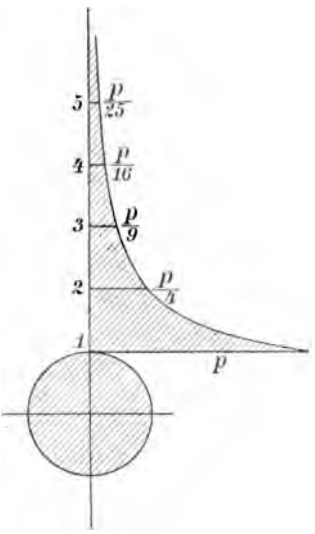
$$x = \frac{p}{y^2} = py^{-2}$$

(Anziehung umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung), deren Fläche

$$\overset{y_2}{\underset{y_1}{F}} = \frac{y_2^{-2+1} - y^{-2+1}}{-2+1} = \frac{\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}}{1} = \frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}$$

die Hebungsarbeit giebt, die z. B. erforderlich ist, einen Körper, der an der Erdoberfläche das Gewicht p hat, zu beliebiger Höhe zu heben. Die Diagrammfläche ist identisch mit der Potentialdifferenz. Auch hierbei vergl. das Methodische Lehrbuch 3, Algebr. Anal. V, c. Für die Elektrizitätslehre, wo es sich auch um Abstofsung handeln kann, ist dies von fundamentaler Wichtigkeit. Vgl. Fig. 145.

Fig. 145.



186) Parabolische Berechnungen.

Es handelt sich hier um Parabeln höherer Ordnung. Willkürlich wird die gewöhnliche Parabel 2ter Ordnung als Beispiel herausgegriffen. Die Berechnung der übrigen geschieht ebenso. Zum Schlufs soll eine Tabelle über die verschiedenen Ordnungen aufgestellt werden.

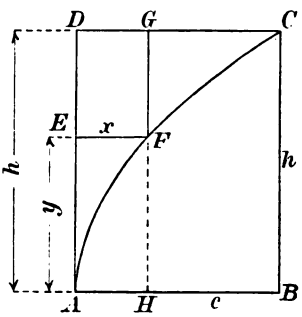
In das Koordinatenrechteck $ABCD$ (Fig. 146) sei die Parabel

1) $$x = \frac{c}{h^2} y^2$$

einbeschrieben, die A zum Scheitel, AB zur Achse hat. Ihre Fläche ist

2) $$\overset{h}{F}_0 = \frac{c}{h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{ch}{3}.$$

Fig. 146.



Das statische Moment des Streifens 1) in Bezug auf die X-Achse ist $xy = \frac{c}{h^2} y^3$, das Moment der Gesamtfläche also:

3) $$M_x = \frac{c}{h^2} \frac{h^4}{4} = \frac{ch^2}{4}.$$

Demnach liegt der Schwerpunkt der Fläche ACD in der Höhe

4) $$y_s = \frac{M_x}{F} = \frac{\frac{ch^2}{4}}{\frac{ch}{3}} = \frac{3}{4} h.$$

Das Trägheitsmoment des Querschnittes 1) in Bezug auf die X-Achse ist $xy^2 = \frac{c}{h^2} y^4$, das der Gesamtfläche also:

5) $$T_x = \frac{c}{h^2} \frac{h^5}{5} = \frac{ch^3}{5}.$$

Für die wagerechte Schwerpunktsachse dagegen wird es

$$6) \qquad T_s = \frac{ch^3}{5} - h_s^2 F = ch^3 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{16}\right) = \frac{ch^3}{80}.$$

Der Trägheitsradius in Bezug auf AB ist

$$7) \qquad \varrho_x = \sqrt{\frac{T_x}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{ch^3}{5}}{\frac{ch^3}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{5}h^2} = h\sqrt{\frac{3}{5}} = h\sqrt{0{,}6}.$$

Der Schwingungspunkt der Fläche ACD in Bezug auf AB liegt in der Höhe

$$8) \qquad l_x = \frac{T_x}{M_x} = \frac{\frac{ch^3}{5}}{\frac{ch^2}{4}} = \frac{4}{5}h.$$

Auf die Folgerungen für die Pendel- und Stofstheorie sei nur hingewiesen.

Das Centrifugalmoment des Streifens 1) in Bezug auf die Koordinatenachsen ergiebt sich nach Nr. 165 als

$$\frac{x^2}{2} y = \frac{1}{2}\frac{c^2}{h^4} y^4 y = \frac{c^2}{2h^4} y^5.$$

Demnach ist für die Gesamtfläche ACD in Bezug auf jene Achse

$$9) \qquad M_{xy} = \frac{c^2}{2h^4}\frac{h^6}{6} = \frac{c^2h^2}{12}.$$

Der Schwerpunkt des mit Hülfe von AB abgeschrägten Körpers, dessen Schrägebene zunächst die Neigung 45^0 habe, dessen Inhalt sich dann aus $M_x = \frac{ch^2}{4}$ ergiebt, hat daher seine Projektion an der Stelle

$$10) \qquad x_s = \frac{M_{xy}}{M_x} = \frac{1}{3}c, \quad y_s = \frac{T_x}{M_x} = \frac{4}{5}h.$$

Bis hierher würde die Lehre von den ganzen Exponenten ausgereicht haben. Jetzt aber soll die Achse AD zu Grunde gelegt werden, wobei gebrochene Exponenten auftreten. Zunächst ergiebt sich der Querschnitt

$$11) \qquad q_x = HG - HF = h - \frac{h}{c^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}},$$

so dafs die Fläche wiederum wird

$$\frac{hc}{1} - \frac{h}{c^{\frac{1}{2}}} \frac{c^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = hc - \frac{2}{3}hc = \frac{ch}{3}.$$

Das statische Moment des Streifens 11) in Bezug auf AD ist

$$hx - \left(\frac{h}{c^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}}\right) x = hx - \frac{h}{c^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{3}{2}}.$$

Daraus folgt für die Fläche das Moment

12) $$M_y = \frac{hc^2}{2} - \frac{h}{c^{\frac{1}{2}}} \frac{c^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = hc^2\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) = \frac{hc^2}{10}.$$

Daraus ergiebt sich als Schwerpunktskoordinate

13) $$x_s = \frac{M_y}{F} = \frac{\frac{hc^2}{10}}{\frac{ch}{3}} = \frac{3}{10} c.$$

Das Trägheitsmoment des Streifens in Bezug auf AD ist

$$hx^2 - \left(\frac{h}{c^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}}\right) x^2 = hx^2 - \frac{h}{c^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{5}{2}}.$$

Für die Fläche folgt als Trägheitsmoment für AD

14) $$T_y = \frac{hc^3}{3} - \frac{h}{c^{\frac{1}{2}}} \frac{c^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = hc^3\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{7}\right) = \frac{hc^3}{21}.$$

Für die senkrechte Schwerpunktsachse wird das Trägheitsmoment

15) $$T_s' = \frac{hc^3}{21} - y_s^2 F = \frac{hc^3}{21} - \frac{9c^2}{100} \frac{ch}{3} = hc^3\left(\frac{1}{21} - \frac{3}{100}\right) = \frac{37hc^3}{2100}.$$

Das polare Trägheitsmoment wird demnach

16) $$T_p = T_s + T_s' = \frac{ch^3}{80} + \frac{37hc^3}{2100} = \frac{ch}{16800} \cdot [210\,h^2 + 296\,c^2]$$

$$= \frac{ch}{8400} [105\,h^2 + 148\,c^2].$$

Der polare Trägheitsradius wird

17) $$\varrho_p = \sqrt{\frac{T_p}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{ch}{8400}[105\,h^2 + 148\,c^2]}{\frac{ch}{3}}} = \sqrt{\frac{105\,h^2 + 148\,c^2}{2800}}.$$

Der Trägheitsradius in Bezug auf AD wird

18) $$\varrho_y = \sqrt{\frac{T_y}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{hc^3}{21}}{\frac{hc}{3}}} = \sqrt{\frac{c^2}{7}} = c\sqrt{\frac{1}{7}}.$$

Der mittels AD abgeschrägte Körper hat die Schwerpunktsprojektion an der Stelle

19) $$x_s = \frac{T_y}{M_y} = \frac{\frac{hc^3}{21}}{\frac{hc^2}{10}} = \frac{10}{21}c, \quad y_s = \frac{M_{xy}}{M_y} = \frac{\frac{h^2c^2}{12}}{\frac{hc^2}{10}} = \frac{5}{6}h.$$

Auch der Schwingungspunkt der Fläche in Bezug auf AD liegt in der Entfernung

$$l_y = \frac{T_y}{M_y} = \frac{\frac{hc^3}{21}}{\frac{hc^2}{10}} = \frac{10}{21}c.$$

Die übrigen physikalischen Deutungen sind den früheren Bemerkungen entsprechend.

Durch Drehung um AD entsteht ein parabolischer Körper, dessen Querschnittsformel ist

20) $$q_y = x^2\pi = \frac{c^2}{h^4}y^4\pi,$$

dessen Inhalt also wird

21) $$J = \frac{c^2\pi}{h^4}\frac{h^5}{5} = \frac{c^2\pi h}{5},$$

was den fünften Teil des zugehörigen Cylinders bedeutet.

Das statische Moment des Schnittes 20) in Bezug auf die Grundfläche ist

$$q_y \cdot y = x^2\pi y = \frac{c^2\pi}{h^4}y^5,$$

das Moment des Körpers wird also

22) $$M_u = \frac{c^2\pi}{h^4}\frac{h^6}{6} = \frac{c^2\pi h^2}{6}.$$

Der Schwerpunkt des Körpers liegt also in der Höhe

23) $$h_s = \frac{M_u}{J} = \frac{\frac{c^2\pi h^2}{6}}{\frac{c^2\pi h}{5}} = \frac{5}{6}h.$$

Das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Grundfläche ist aus

$$x^2\pi y^2 = \frac{c^2\pi}{h^4}y^4\,y^2 = \frac{c^2\pi}{h^4}y^6$$

zu berechnen als

24) $$T_u = \frac{c^2\pi}{h^4}\frac{h^7}{7} = \frac{c^2\pi h^3}{7}.$$

Das Trägheitsmoment jeder Schicht in Bezug auf Achse AD ist

$$\frac{x^4\pi}{2} = \frac{1}{2}\frac{c^4\pi}{h^8}y^8,$$

das des ganzen Körpers also

25) $$T = \frac{1}{2}\frac{c^4}{h^8}\frac{\pi h^9}{9} = \frac{c^4\pi h}{18}.$$

In Bezug auf jeden Hauptschnitt durch T ist es halb so groſs, also

26) $$T_1 = \frac{c^4 \pi h}{36},$$

in Bezug auf die Gerade AB also

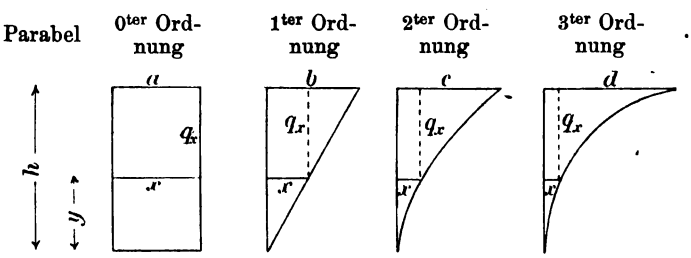
$$T' = T_1 + T_u = \frac{c^4 \pi h}{36} + \frac{c^2 \pi h^3}{7} = \frac{c^2 \pi}{252}(7\,c^2 + 36\,h^2).$$

Auf sonstige physikalische Dinge sei nur hingedeutet. Ebenso leicht ist der durch Drehung um AB entstehende Körper zu behandeln.

187) Macht man entsprechende Betrachtungen für die aufeinander folgenden Parabeln höherer Ordnung, so ergiebt sich die nachstehende Tabelle. Betrachtet man die nach rechts aufeinander folgenden Ausdrücke, so zeigt sich, daſs die entsprechenden Zahlen nach einfachen arithmetischen Reihen aufeinander folgen. Man kann also nicht nur für die ganzen Exponenten alles ohne weiteres hinschreiben, sondern auch für die zwischenliegenden gebrochenen Exponenten leichte Interpolationen machen. Damit ist die Theorie für die einfachen Parabeln höherer Ordnung erledigt.

188) Tabelle über Parabeln höherer Ordnung.

Fig. 147.



a) Parabolische Flächen.

Querschnitt in Höhe y	$x = a,$	$\frac{b}{h}y,$	$\frac{c}{h^2}y^2,$	$\frac{d}{h^3}y^3,$	...
1. Fläche von $y=0$ bis $y=h$	$\overset{h}{\underset{0}{F}} = \frac{ah}{1},$	$\frac{bh}{2},$	$\frac{ch}{3},$	$\frac{dh}{4},$	...
2. statisches Moment in Bezug auf Grundlinie	$M_x = \frac{ah^2}{2},$	$\frac{bh^2}{3},$	$\frac{ch^2}{4},$	$\frac{dh^2}{5},$	...
3. Trägheitsmoment für Grundlinie	$T_x = \frac{ah^3}{3},$	$\frac{bh^3}{4}$	$\frac{ch^3}{5},$	$\frac{dh^3}{6},$	...

	Parabel 0ter Ordnung	1ter Ordnung	2ter Ordnung	3ter Ordnung ...
4. senkrechte Querlinie im Abstande x	$q_x = h,$	$h - \frac{h}{b^1} x^1,$	$h - \frac{h}{\frac{1}{c^2}} x^{\frac{1}{2}},$	$h - \frac{h}{\frac{1}{c^3}} x^{\frac{1}{3}},$ ...
5. statisches Moment in Bezug auf Begrenzung links	$M_y = \frac{ha^2}{2},$	$\frac{hb^2}{6},$	$\frac{hc^2}{10},$	$\frac{hd^2}{14},$ ...
6. Trägheitsmoment für diese Linie	$T_y = \frac{ha^3}{3},$	$\frac{hb^3}{12},$	$\frac{hc^3}{21},$	$\frac{hd^3}{30},$ ...
7. Centrifugalmoment in Bezug auf die beiden Grenzlinien	$M_{xy} = \frac{a^2h^2}{4},$	$\frac{b^2h^2}{8},$	$\frac{c^2h^2}{12},$	$\frac{d^2h^2}{16},$ ...
8. Schwerpunktshöhe	$y_s = \frac{1}{2}h,$	$\frac{2}{3}h,$	$\frac{3}{4}h,$	$\frac{4}{5}h,$ ...
9. Schwerpunktsabstand horizontal	$x_s = \frac{1}{2}a,$	$\frac{2}{6}b,$	$\frac{3}{10}c,$	$\frac{4}{14}d,$ ...
10. Höhe des Trägheitsmittelpunktes in Bezug auf Grundlinie	$\varrho_y = h\sqrt{\frac{1}{3}},$	$h\sqrt{\frac{2}{4}},$	$h\sqrt{\frac{3}{5}},$	$h\sqrt{\frac{4}{6}},$ ...
11. Horizontalabstand des Trägheitsmittelpunktes in Bezug auf linke Grenzlinie	$\varrho_x = a\sqrt{\frac{1}{3}},$	$b\sqrt{\frac{2}{12}},$	$c\sqrt{\frac{3}{21}},$	$d\sqrt{\frac{4}{30}},$ ...
12. Schwingungspunkt bei Drehung um Grundlinie	$l_x = \frac{2}{3}h,$	$\frac{3}{4}h,$	$\frac{4}{5}h,$	$\frac{5}{6}h,$ ...
13. Schwingungspunkt bei Drehung um Grenzlinie links	$l_y = \frac{2}{3}a,$	$\frac{6}{12}b,$	$\frac{10}{21}c,$	$\frac{14}{30}d,$ ...
14. Quotient aus Centrifugalmoment für beide Achsen und statischem Moment M_x	$e_y = \frac{M_{xy}}{M_x} = \frac{2}{4}a,$	$\frac{3}{8}b,$	$\frac{4}{12}c,$	$\frac{5}{12}d,$ ...
15. Quotient aus Centrifugalmoment und M_y	$e_x = \frac{M_{xy}}{M_y} = \frac{1}{2}h,$	$\frac{3}{4}h,$	$\frac{5}{6}h,$	$\frac{7}{8}h,$ ...

	Parabel 0ter Ordnung	1ter Ordnung	2ter Ordnung	3ter Ordnung	...
16. Trägheitsmoment in Bezug auf Grundecke	$T_p = T_x + T_y = \frac{ah}{3 \cdot 3}(3h^2+3a^2)$,	$\frac{bh}{4 \cdot 12}(12h^2+4b^2)$,	$\frac{ch}{5 \cdot 21}(21h^2+5b^2)$,	$\frac{ch}{6 \cdot 30}(30h^2+6d^2)$,	...
u. s. w.					

b) Drehungskörper mit senkrechter Achse.

1. Querschnittsfläche in Höhe y	$q_y = a^2\pi$,	$\frac{b^2}{h^2}\pi y^2$,	$\frac{c^2}{h^4}\pi y^4$,	$\frac{d^2}{h^6}\pi y^6$,	...
2. Inhalt	$J = a^2\pi\frac{h}{1}$,	$b^2\pi\frac{h}{3}$,	$c^2\pi\frac{h}{5}$,	$d^2\pi\frac{h}{7}$,	...
3. statisches Moment für Grundfläche	$M_u = a^2\pi\frac{h^2}{2}$,	$b^2\pi\frac{h^2}{4}$,	$c^2\pi\frac{h^2}{6}$,	$d^2\pi\frac{h^2}{8}$,	...
4. Trägheitsmoment für Grundfläche	$T_u = a^2\pi\frac{h^3}{3}$,	$b^2\pi\frac{h^3}{5}$,	$c^2\pi\frac{h^3}{7}$,	$d^2\pi\frac{h^3}{9}$,	...
5. Schwerpunktshöhe	$h_s = \frac{1}{2}h$,	$\frac{3}{4}h$,	$\frac{5}{6}h$,	$\frac{7}{8}h$;	...
6. Trägheitsradius für Grundfläche	$\varrho_u = h\sqrt{\frac{1}{3}}$,	$h\sqrt{\frac{3}{5}}$,	$h\sqrt{\frac{5}{7}}$,	$h\sqrt{\frac{7}{9}}$,	...
7. Quotient $\frac{T_u}{M_u}$	$\frac{T_u}{M_u} = \frac{2}{3}h$,	$\frac{4}{5}h$,	$\frac{6}{7}h$,	$\frac{8}{9}h$,	...
8. Trägheitsmoment für senkrechte Achse	$T_p = \frac{a^4\pi h}{2}$,	$\frac{b^4\pi h}{10}$,	$\frac{c^4\pi h}{18}$,	$\frac{d^4\pi h}{26}$,	...
9. Trägheitsmoment für senkrechten Hauptschnitt	$T_1 = \frac{a^4\pi h}{4}$,	$\frac{b^4\pi h}{20}$,	$\frac{c^4\pi h}{36}$,	$\frac{d^4\pi h}{52}$,	...
10. Trägheitsmoment für Grundachse, $T_p' = T_1 + T_u$	$T_p = \frac{a^2h\pi}{3 \cdot 4}(3a^2+4b^2)$,	$\frac{b^2\pi h}{5 \cdot 20}(5b^2+20h^2)$,	$\frac{c^2\pi h}{7 \cdot 36}(7b^2+36h^2)$,	$\frac{d^2\pi h}{9 \cdot 52}(9b^2+52h^2)$,	...
u. s. w.					

189) Alles andere läfst sich aus diesen Tabellen leicht ableiten, insbesondere auch die Momente für die Restflächen, deren Drehungskörper sich ebenso leicht behandeln lassen. Übungsbeispiele mathematischer und mechanischer Art, z. B. über abgeschrägte Körper, die über diesen Flächen stehen und ihre Schwerpunkte, über Centrifugalkräfte der massenbelegten Flächen, über seitlichen Wasserdruck gegen solche Flächen, über die Dynamik der genannten Drehungskörper lassen sich in grofser Zahl anschliefsen. Die Fortsetzung der Tabellen nach rechts kann ohne Mühe auf Grund arithmetischer Reihen geschehen, ebenso die Interpolation für gebrochene Exponenten, für die unter 190) ein Beispiel gegeben werden soll.

190) Beispiel der Neilschen Parabel (semikubische Parabel)

$$x = \frac{k y^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{3}{2}}}.$$

Durch Einschaltung zwischen die zweite und dritte Kolonne findet man aus der Tabelle sofort

$$F = \frac{kh}{2\frac{1}{2}} = \tfrac{5}{2} kh, \quad M_x = \frac{kh^2}{3\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{7} kh^2, \quad T_x = \frac{kh^3}{4\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{9} kh^3,$$

$$M_y = \frac{hk^2}{8}, \quad T_y = \frac{hk^3}{\frac{12+21}{2}} = \frac{2hk^3}{33}, \quad M_{xy} = \frac{k^2h^2}{10}, \quad y_s = \frac{2\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}} h = \tfrac{5}{7} h,$$

$$x_s = \frac{2\frac{1}{2}}{8} k = \tfrac{5}{16} k, \quad \varrho_y = h \sqrt{\frac{2\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}}} = h \sqrt{\tfrac{5}{9}},$$

$$\varrho_x = k \sqrt{\frac{2\frac{1}{2}}{\frac{12+21}{2}}} = k \sqrt{\tfrac{5}{33}}, \quad l_x = h \frac{3\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}} = \tfrac{7}{9} h, \quad l_y = \frac{8}{\frac{12+21}{2}} k = \tfrac{16}{33} k,$$

$$e_y = \frac{M_{xy}}{M_x} = \frac{3\frac{1}{2}}{10} k = \tfrac{7}{20} k, \quad e_x = \frac{M_{xy}}{M_y} = \tfrac{4}{5} h, \quad \text{u. s. w.}$$

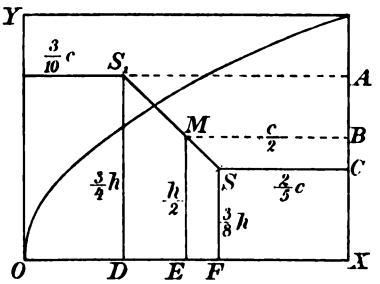
Ebenso ist der Drehungskörper der Neilschen Parabel leicht mittels der Interpolation innerhalb der Tabelle zu behandeln.

191) Die Parabeln von der Ordnung $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ u. s. w. können auch so behandelt werden, dafs man die Parabel 2ter, 3ter, 4ter u. s. w. Ordnung um die Gerade von 45^0 Neigung klappt. Es handelt sich also nur um eine Vertauschung der Koordinaten, im übrigen sind die Rechnungen und Resultate dieselben.

Um zu zeigen, wie man aus den Resultaten der Tabelle die Resultate für die Restflächen der Rechtecke ableiten kann, werde das Beispiel der gewöhnlichen Parabel behandelt.

192) Beispiel der gewöhnlichen Parabel. Die Flächen verhalten sich wie $1:2$, folglich $S_1M:MS=2:1$, ebenso $AB:BC$ und $DE:EF$. Da $AB=\frac{3}{4}h-\frac{h}{2}=\frac{h}{4}$, so ist $BC=\frac{h}{8}$, folglich $FS=\frac{3}{8}h$; da ferner $DE=\frac{c}{2}-\frac{3}{10}c=\frac{2}{10}c$, so folgt $EF=\frac{c}{10}$ und daher $CS=\frac{4}{10}c=\frac{2}{5}c$ und $CF=\frac{3}{5}c$.

Fig. 148.



Die statischen Momente sind daher

$$M_x=\tfrac{2}{3}ch\cdot\tfrac{3}{8}h=\frac{ch^2}{4},$$

$$M_y=\tfrac{2}{3}ch\cdot\tfrac{3}{5}c=\tfrac{2}{5}hc^2.$$

Die Trägheitsmomente, durch Subtraktion aus dem Rechteck abgeleitet, sind

$$T_x=\frac{ch^3}{3}-\frac{ch^3}{5}=\tfrac{2}{15}ch^3,$$

$$T_y=\frac{hc^3}{3}-\frac{hc^3}{21}=\tfrac{2}{7}hc^3.$$

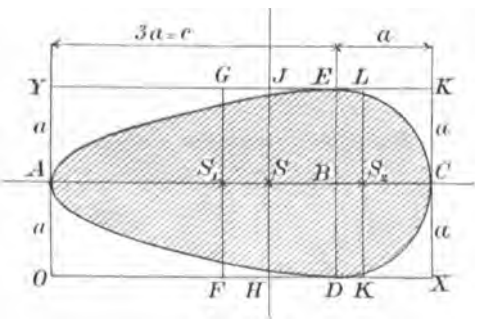
Für den Schwerpunkt erhält man

$$T_s=T_x-F\left(\tfrac{3}{8}h\right)^2=\tfrac{2}{15}ch^3-\tfrac{2}{3}ch\tfrac{9}{64}h^2=ch^3\left(\tfrac{2}{15}-\tfrac{3}{32}\right)=\tfrac{19}{480}ch^3,$$

$$T_s'=T_y-F\left(\tfrac{3}{5}c\right)^2=\tfrac{2}{7}hc^3-\tfrac{2}{3}ch\tfrac{9}{25}c^2=hc^3\left(\tfrac{2}{7}-\tfrac{6}{25}\right)=\frac{8hc^3}{175}.$$

193) **Aufgabe.** Ein Haken habe an der am stärksten beanspruchten Stelle einen Querschnitt, der nach der einen Seite durch einen Halbkreis mit Radius a begrenzt ist, nach der andern durch eine Parabel, die einem Rechteck mit den Seiten $3a$ und $2a$ eingeschrieben ist. Der Schwerpunkt und das mafsgebende Trägheitsmoment sollen berechnet werden.

Fig. 149 a.



Auflösung. Nach vorigem Abschnitte ist

$$AS_1=\tfrac{3}{5}c=\tfrac{9}{5}a,$$

aufserdem ist

$$AS_2=3a+\frac{3a}{4\pi}=\frac{3a}{4\pi}(4\pi+1),\quad F_1=\tfrac{2}{3}2a\cdot3a=4a^2,\quad F_2=\frac{a^2\pi}{2}.$$

Folglich ist in Bezug auf OY

$$M_y = AS_1 \cdot F_1 + AS_2 \cdot F_2 = \tfrac{9}{5} a \cdot 4a^2 + \tfrac{3a}{4\pi}(4\pi + 1)\tfrac{a^2\pi}{2}$$

$$= \tfrac{36a^3}{5} + \tfrac{3a^3(4\pi+1)}{8} = \tfrac{a^3}{40}[288 + 15(4\pi+1)] = \tfrac{a^3}{40}[303 + 60\pi].$$

Folglich

$$AS = e_s = \frac{M_y}{F_1 + F_2} = \frac{\frac{a^3}{40}[303 + 60\pi]}{4a^2 + \frac{a^2\pi}{2}} = \frac{a[303 + 60\pi]}{20(8 + \pi)}.$$

Für die Parabel ist in Bezug auf HJ

$$T_s' = \frac{8hc^3}{175} = \frac{8 \cdot 2a \cdot (3a)^3}{175} = \frac{432a^4}{175}.$$

Verschoben mufs werden um $S_1S = e_s - \frac{9}{5} a$. Demnach ist in Bezug auf HE

$$T' = \frac{432a^4}{175} + \left(e_s - \tfrac{9}{5} a\right)^2 4a^2.$$

Für den Kreis ist in Bezug auf KL

$$T_s'' = r^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) = a^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right).$$

Verschoben wird um $SS_2 = AS_2 - e_s = \frac{3a}{4\pi}(4\pi + 1) - e_s$. Demnach ist in Bezug auf HE

$$T'' = a^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) + \left[\tfrac{3a}{4\pi}(4\pi + 1) - e_s\right]^2 \frac{a^2\pi}{2}.$$

Das gesuchte Trägheitsmoment ist

$$T = T' + T''.$$

Die numerische Ausrechnung für einen beliebigen Wert von a macht keine Schwierigkeiten.

194) Die gleichseitige Hyperbel $x = \frac{1}{y}$.

Der Querschnitt ist $x = \frac{1}{y}$, demnach wird die Fläche von 1 bis y

$$\overset{y}{\underset{1}{F}} = {}^e\lg y.$$

Das statische Moment des Querschnitts in Bezug auf die X-Achse ist $xy = \frac{1}{y} y = 1$, folglich für die Fläche von 0 bis y

$$M_x = \frac{y}{1},$$

obwohl diese Fläche sich nach rechts ins Unendliche erstreckt. Für die Fläche von 1 bis y ist

$$M_x = \frac{y}{1} - \frac{1}{1} = y - 1.$$

Die Schwerpunktshöhe der letzteren Fläche ist also

$$y_s = \frac{M_x}{F} = \frac{y-1}{{}^e\lg y}.$$

Dagegen ist das statische Moment in Bezug auf die Y-Achse mit Hülfe der Querschnittsformel

$$q_y = x \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2y^2} = \frac{1}{2} y^{-2}$$

zu berechnen. Für die Fläche von $y = 1$ bis y ergiebt sich

$$M_y = \frac{1}{2} \frac{y^{-1}}{-1} - \frac{1}{2} \frac{1^{-1}}{-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{y}\right) = \frac{y-1}{2y},$$

so dafs ihre andere Schwerpunktskoordinate wird

$$x_s = \frac{M_y}{F} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{y}\right)}{{}^e\lg y} = \frac{y-1}{2y\,{}^e\lg y}.$$

Das Trägheitsmoment T_x entspringt der Querschnittsformel

$$q_y = x \cdot y^2 = \frac{1}{y} y^2 = y,$$

demnach wird für die Fläche von 0 bis y

$$\overset{y}{\underset{0}{T}} = \frac{y^2}{2}, \quad \text{dagegen} \quad \overset{y}{\underset{1}{T}} = \frac{1}{2}(y^2 - 1).$$

Der Trägheitsradius der Fläche von 1 bis y wird

$$\varrho_x = \sqrt{\frac{\overset{y}{\underset{1}{T}}}{\overset{y}{\underset{1}{F}}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(y^2-1)}{{}^e\lg y}} = \sqrt{\frac{y^2-1}{2\,{}^e\lg y}},$$

der Schwingungspunkt liegt für die Fläche von 1 bis y in der Höhe

$$y_m = \frac{\frac{1}{2}(y^2-1)}{y-1} = \frac{1}{2}(y+1),$$

für die Fläche von 0 bis y in der Höhe

$$y_m = \frac{\frac{y^2}{2}}{\frac{y}{1}} = \frac{y}{2}.$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Y-Achse ist aus

$$q_y = \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}\frac{1}{y^3} = \frac{1}{3}y^{-3}$$

abzuleiten. Es ergiebt sich für die Fläche von 1 bis y

$$T_y = \frac{1}{3}\frac{y^{-2}}{-2} - \frac{1}{3}\frac{1^{-2}}{-2} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{y^2}\right) = \frac{y^2-1}{6y^2}.$$

Der entsprechende Trägheitsradius ist

$$\varrho_y = \sqrt{\frac{T_y}{F}} = \sqrt{\frac{y^2-1}{6y^2 {}^e\lg y}},$$

der entsprechende Schwingungspunkt

$$x_s = \frac{T_y}{M_y} = \frac{y^2-1}{6y^2} \cdot \frac{2y}{y-1} = \frac{y+1}{3y}.$$

Das Centrifugalmoment in Bezug auf beide Achsen ist aus der Querschnittsformel

$$q_y = \frac{x^2}{2}y = \frac{1}{2}\frac{1}{y^2}y = \frac{1}{2y}$$

zu berechnen.

Für die Fläche von 1 bis y ergiebt sich

$$M_{xy} = \frac{1}{2}{}^e\lg y - \frac{1}{2}{}^e\lg 1 = \frac{1}{2}{}^e\lg y.$$

Auch für ein Segment dieser Hyperbel, welches durch eine Gerade von -45^0 abgeschnitten wird, lassen sich alle diese Berechnungen durchführen, indem man vom ganzen Dreieck die entsprechenden Teile abzieht.

Dreht sich die Hyperbel um die Y-Achse, so wird der Querschnitt des entstehenden Körpers

$$q_y = x^2\pi = \frac{\pi}{y^2} = \pi y^{-2},$$

demnach wird der Inhalt von 1 bis y

$$\overset{y}{\underset{1}{J}} = \pi\left(\frac{y^{-1}}{-1} - \frac{1^{-1}}{-1}\right) = \pi\left(1 - \frac{1}{y}\right) = \frac{\pi(y-1)}{y},$$

z. B.

$$\overset{\infty}{\underset{1}{J}} = \pi\left(1 - \frac{1}{\infty}\right) = \pi.$$

Das statische Moment für die Grundfläche wird aus

$$q_y = x^2\pi \cdot y = \frac{\pi}{y^2}y = \frac{\pi}{y}$$

berechnet als

$$\overset{y}{\underset{1}{M}} = \pi\,{}^e\lg y.$$

Das Trägheitsmoment für die Grundfläche wird nach $q_y = \frac{\pi}{y}\, y = \pi$

$$\overset{y}{\underset{1}{T}} = \pi\left(\frac{y}{1} - \frac{1}{1}\right) = \pi\,(y-1),$$

bezw.

$$\overset{y}{\underset{0}{T}} = \pi y.$$

Sein Trägheitsmoment für die Y-Achse folgt aus $q_y = \frac{x^4\pi}{2} = \frac{\pi}{2y^4}$ als

$$\overset{y}{\underset{1}{T}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{y^{-3}}{-3} - \frac{1^{-3}}{-3}\right) = \frac{\pi}{6}\cdot\left(1 - \frac{1}{y^3}\right),$$

z. B.

$$\overset{\infty}{\underset{1}{T}} = \frac{\pi}{6}\left(1 - \frac{1}{\infty^3}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

195) Beispiel der Gravitationskurve $x = \frac{1}{y^2}$.

Querschnitt $q_y = \frac{1}{y^2}$, sein statisches Moment für die X-Achse $xy = \frac{1}{y}$, sein Trägheitsmoment für dieselbe $xy^2 = 1$. Folglich

$$\overset{y}{\underset{1}{F}} = \frac{y^{-1}}{-1} - \frac{1^{-1}}{-1} = 1 - \frac{1}{y} = \frac{y-1}{y},$$

z. B.

$$\overset{\infty}{\underset{1}{F}} = 1 - \frac{1}{\infty} = 1.$$

Statisches Moment

$$\overset{y}{\underset{1}{M}} = {}^{e}\lg y,$$

Trägheitsmoment

$$\overset{y}{\underset{1}{T}} = \frac{y}{1} - \frac{1}{1} = y - 1.$$

Das statische Moment für die Y-Achse folgt aus $q_y = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2y^4}$ als

$${}^{y}_{1}M_{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{y^{-3}}{-3} - \frac{1^{-3}}{-3}\right) = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{y^3}\right),$$

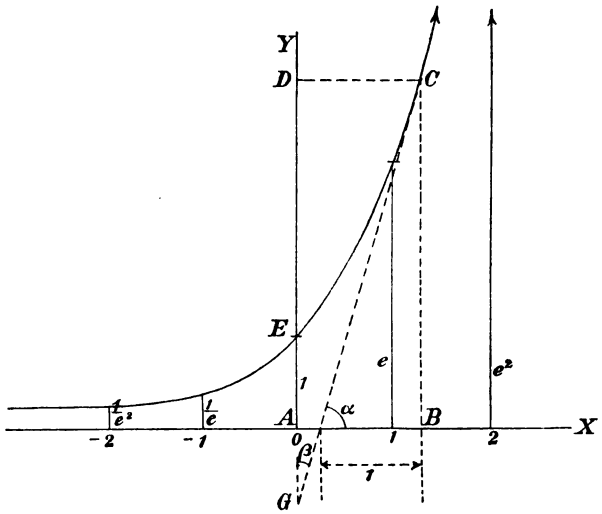
das Trägheitsmoment aus $q_y = \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3y^6}$ als

$${}^{y}_{1}T_{y} = \frac{1}{5}\left(\frac{y^{-5}}{-5} - \frac{1^{-5}}{-5}\right) = \frac{1}{15}\left(1 - \frac{1}{y^5}\right).$$

Auf die Bedeutung für die kosmische Physik und die Potentialtheorie sei im Anschlufs an das Methodische Lehrbuch aufmerksam gemacht.

195b) Ein transcendentes Beispiel. Nicht der technischen Wichtigkeit halber, sondern um zu zeigen, wie man transcendente Kurven aller Art, z. B. auch die Sinuskurve, die Cosinuskurve, die Kettenlinie $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ u. s. w. behandeln kann, soll die logarithmische Linie $y = e^x$ oder $x = {}^e\lg y$ als Beispiel eingehender untersucht werden. In Fig. 149 b ist sie dargestellt.

Fig. 149 b.



Zunächst folgt aus

1) $$y = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

nach Nr. 170, daſs die Neigung α der in dem Kurvenpunkte x, y angelegten Tangente sich aus

$$\tan\alpha = 0 + \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x$$

berechnet also aus

2) $$\tan\alpha = e^x = y = \frac{y}{1}.$$

Demnach ist die Projektion der in C angelegten Tangente stets gleich 1, wo auch C auf der Kurve liege. Die Tangente in C wird also konstruiert, indem man das Lot CB fällt, von B aus nach links die Strecke 1 abträgt und den freien Endpunkt mit C verbindet.

Für die Fläche $ABCE$ folgt nach der Schichtenformel aus 1

$$\overset{x}{\underset{0}{F}} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1!\,2} + \frac{x^3}{2!\,3} + \frac{x^4}{3!\,4} + \cdots = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

oder

3) $$\overset{x}{\underset{0}{F}} = e^x - 1.$$

So ist z. B.

$$\overset{0}{\underset{-\infty}{F}} = 1 - e^{-\infty} = 1.$$

In Fig. 149 b ist für jedes Lot $BC = y = e^x$ das statische Moment in Bezug auf die Y-Achse

$$yx = e^x x = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots,$$

folglich ist das statische Moment der Fläche $ABCE$ in Bezug auf die Y-Achse

$$M_y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{1!\,3} + \frac{x^4}{2!\,4} + \frac{x^5}{3!\,5} + \cdots$$

oder

$$M_y = x^2\left(\tfrac{1}{1!} - \tfrac{1}{2!}\right) + x^3\left(\tfrac{1}{2!} - \tfrac{1}{3!}\right) + x^4\left(\tfrac{1}{3!} - \tfrac{1}{4!}\right) + \cdots$$

$$= x\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)$$

$$= x(e^x - 1) - \left(e^x - 1 - \frac{x}{1!}\right) = xe^x - e^x + 1 - x + x = xe^x - e^x + 1,$$

also

4) $$M_y = e^x(x - 1) + 1.$$

Das Trägheitsmoment der Geraden BC in Bezug auf die Y-Achse ist

$$e^x \cdot x^2 = x^2 + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \cdots,$$

so dafs für die Fläche von 0 bis x wird

$$T_y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{1!\,4} + \frac{x^5}{2!\,5} + \frac{x^6}{3!\,6} + \cdots.$$

Nun ist aber der Reihe nach

$$\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{1!} - 2\left(\tfrac{1}{2!} - \tfrac{1}{3!}\right)$$

$$\tfrac{1}{1!\,4} = \tfrac{1}{2!} - 2\left(\tfrac{1}{3!} - \tfrac{1}{4!}\right)$$

$$\tfrac{1}{2!\,5} = \tfrac{1}{3!} - 2\left(\tfrac{1}{4!} - \tfrac{1}{5!}\right)$$

u. s. w. Folglich ist

$$T_y = x^3\left(\tfrac{1}{1!} - \tfrac{2}{2!} + \tfrac{2}{3!}\right) + x^4\left(\tfrac{1}{2!} - \tfrac{2}{3!} + \tfrac{2}{4!}\right) + x^5\left(\tfrac{1}{3!} - \tfrac{2}{4!} + \tfrac{2}{5!}\right) + \cdots$$
$$= x^2\left[\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right] - 2x\left[\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right]$$
$$+ 2\left[\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right] = x^2(e^x - 1) - 2x\left(e^x - 1 - \frac{x}{1!}\right)$$
$$+ 2\left[e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!}\right] = e^x(x^2 - 2x + 2) - x^2 + 2x^2 - \frac{2x^2}{2}$$
$$+ 2x - 2x - 2 = e^x(x^2 - 2x + 2) - 2,$$

oder endlich

5) $$T_y = e^x(x^2 - 2x + 2) - 2.$$

Das statische Moment M_x in Bezug auf die X-Achse ist zu behandeln mit Hülfe der Querschnittsformel

$$q_x = e^x \cdot \frac{e^x}{2} = \tfrac{1}{2}e^{2x} = \tfrac{1}{2}\left[1 + \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \cdots\right].$$

Für die Fläche von 0 bis x giebt dies

$$M_x = \tfrac{1}{2}\left[\frac{x}{1} + \frac{2x^2}{1!2} + \frac{4x^3}{2!3} + \frac{8x^4}{3!4} + \cdots\right]$$
$$= \tfrac{1}{4}\left[\frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \cdots\right]$$

oder

6) $$M_x = \tfrac{1}{4}[e^{2x} - 1].$$

Das Trägheitsmoment T_x verlangt die Behandlung der Querschnittsformel

$$q_x = \frac{(e^x)^3}{3} = \frac{e^{3x}}{3} = \tfrac{1}{3}\left[1 + \frac{3x}{1!} + \frac{9x^2}{2!} + \frac{27x^3}{3!} + \frac{81x^4}{4!} + \cdots\right].$$

Für die Fläche von 0 bis x giebt dies

$$T_x = \tfrac{1}{3}\left[\frac{x}{1} + \frac{3x^2}{1!2} + \frac{9x^3}{2!3} + \frac{27x^4}{3!4} + \cdots\right]$$
$$= \tfrac{1}{9}\left[\frac{3x}{1!} + \frac{9x^2}{2!} + \frac{27x^3}{3!} + \frac{81x^4}{4!} + \cdots\right]$$

oder

7) $$T_x = \tfrac{1}{9}[e^{3x} - 1].$$

Für den Schwerpunkt der Fläche $ABCE$ folgen die Koordinaten

8) $$x_s = \frac{M_y}{F} = \frac{e^x(x-1)-1}{e^x - 1}, \quad y_s = \frac{M_x}{F} = \frac{\frac{1}{4}(e^{2x} - 1)}{e^x - 1} = \tfrac{1}{4}(e^x + 1).$$

Die Trägheitsradien in Bezug auf die beiden Achsen sind

9) $$\varrho_y = \sqrt{\frac{T_y}{F}} = \sqrt{\frac{e^x(x^2-2x+2)-2}{e^x-1}},$$

$$\varrho_x = \sqrt{\frac{T_x}{F}} = \sqrt{\tfrac{1}{9}\frac{e^{3x}-1}{e^x-1}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{e^{3x}-1}{e^x-1}}.$$

Die Abstände der Schwingungspunkte in Bezug auf beide Achsen sind

10) $$x_m = \frac{T_y}{M_y} = \frac{e^x(x^2-2x+2)-2}{e^x(x-1)-1},$$

$$y_m = \frac{T_x}{M_x} = \frac{\frac{1}{9}(e^{3x}-1)}{\frac{1}{4}(e^{2x}-1)} = \tfrac{4}{9}\frac{e^{3x}-1}{e^{2x}-1}.$$

Auch das Centrifugalmoment M_{xy} in Bezug auf beide Achsen läfst sich berechnen. Die entsprechende Querschnittsformel ist

$$\frac{(e^x)^2}{2}x = \frac{xe^{2x}}{2} = \frac{x}{2}\left[1+\frac{2x}{1!}+\frac{4x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\frac{16x^4}{4!}+\cdots\right]$$

oder

$$q_x = \tfrac{1}{2}\left[x+\frac{2x^2}{1!}+\frac{4x^3}{2!}+\frac{8x^4}{3!}+\frac{16x^5}{4!}+\cdots\right].$$

Daraus folgt für die Fläche von 0 bis x

$$M_{xy} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{1!\,3}+\frac{4x^4}{2!\,4}+\frac{8x^5}{3!\,5}+\frac{16x^6}{4!\,6}+\cdots\right]$$

$$= \tfrac{1}{8}\left[\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{1!\,3}+\frac{(2x)^4}{2!\,4}+\frac{(2x)^5}{3!\,5}+\frac{(2x)^6}{4!\,6}+\cdots\right]$$

$$= \tfrac{1}{8}\left[(2x)^2\left(\tfrac{1}{1!}-\tfrac{1}{2!}\right)+(2x)^3\left(\tfrac{1}{2!}-\tfrac{1}{3!}\right)+(2x)^4\left(\tfrac{1}{3!}-\tfrac{1}{4!}\right)\cdots\right]$$

oder, getrennt geschrieben:

$$M_{xy} = \frac{2x}{8}\left[\frac{(2x)}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\cdots\right]-\tfrac{1}{8}\left[\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^4}{4!}+\cdots\right],$$

oder

11) $$M_{xy} = \frac{2x}{8}\left[e^{2x}-1\right]-\tfrac{1}{8}\left[e^{2x}-1-\frac{2x}{1}\right]$$

$$= \frac{e^{2x}}{8}[2x-1]-\tfrac{1}{8}[2x-2x-1] = \frac{e^{2x}}{8}[2x-1]+\tfrac{1}{8}.$$

In gleicher Weise läfst sich dieselbe Kurve mit Hülfe der Gleichung

$$x = {}^e\lg y,$$

oder, indem man den Nullpunkt um die Strecke 1 nach oben verschiebt, mit Hülfe von

12) $$x = \lg(1+z) = \frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots$$

behandeln. Man kann aber die obigen Resultate von den zum Rechteck $ABCD$ gehörigen abziehen und so das Nötige für die Fläche CDE sofort hinschreiben. So ist z. B.

13) $F' = \overset{y}{\underset{1}{F}} = xe^x - (e^x - 1) = e^x(x-1) + 1 = y(\lg y - 1) + 1$

Die Behandlung der Reihe 12) würde auf $(1+z)[\lg(1+z) - 1] + 1$ führen. Man achte darauf, dafs die Formeln für F' und M_y identisch sind.

Das statische Moment von CDE für die Y-Achse wird

$$M_y' = (xe^x)\frac{x}{2} - [e^x(x-1) + 1] = e^x\left[\frac{x^2}{2} - x + 1\right] - 1$$
$$= y\left[\tfrac{1}{2}\lg y)^2 - \lg y + 1\right] - 1.$$

Man achte darauf, dafs dies die Hälfte von T_y ist.

Das Trägheitsmoment für die Y-Achse wird

$$T_y' = \frac{e^x x^3}{3} - [e^x(x^2 - 2x + 2) - 2] = e^x\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x - 2\right] + 2$$
$$= y\left[\tfrac{1}{3}(\lg y)^3 - (\lg y)^2 + 2\lg y - 2\right] + 2.$$

Als statisches Moment für die X-Achse findet man

$$M_x' = (xe^x)\frac{e^x}{2} - \tfrac{1}{4}[e^{2x} - 1] = e^{2x}\left(\frac{x}{2} - \tfrac{1}{4}\right) + 1 = y^2\left[\tfrac{1}{2}\lg y - \tfrac{1}{4}\right] + 1,$$

als Trägheitsmoment für die X-Achse

$$T_x' = \frac{x(e^x)^3}{3} - \tfrac{1}{9}[e^{3x} - 1] = e^{3x}\left[\frac{x}{3} - \tfrac{1}{9}\right] + 1 = y^3\left[\tfrac{1}{3}\lg y - \tfrac{1}{9}\right] + 1.$$

Das Centrifugalmoment von CDE für beide Achsen wird

$$M_{xy}' = \frac{x^2(e^x)^2}{4} - \frac{e^{2x}}{8}(2x - 1) + \tfrac{1}{8} = \frac{e^{2x}}{8}[2x^2 - 2x + 1] + \tfrac{1}{8}$$
$$= \frac{y^2}{8}[2(\lg y)^2 - 2\lg y + 1] + \tfrac{1}{8}.$$

Der Schwerpunkt der Fläche CDE hat die Koordinaten

$$x_s = \frac{M_y'}{F'} = \frac{e^x\left[\frac{x^2}{2} - x + 1\right] - 1}{e^x[x-1] + 1} = \frac{y\left[\frac{1}{2}(\lg y)^2 - \lg y + 1\right] - 1}{y[\lg y - 1] + 1},$$

$$y_s = \frac{M_x'}{F'} = \frac{e^{2x}\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right] + 1}{e^x[x-1] + 1} = \frac{y^2\left[\frac{1}{2}\lg y - \frac{1}{4}\right] + 1}{y[\lg y - 1] + 1}.$$

Die Trägheitsradien sind

$$\varrho_y = \sqrt{\frac{T'_y}{F'}} = \sqrt{\frac{e^x\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x - 2\right] + 2}{e^x[x-1]+1}}$$

$$= \sqrt{\frac{y\left[\frac{1}{3}(\lg y)^3 - (\lg y)^2 + 2\lg y - 2\right] + 2}{y[\lg y - 1] + 1}},$$

$$\varrho_x = \sqrt{\frac{T'_x}{F'}} = \sqrt{\frac{e^{3x}\left[\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right] + 1}{e^x[x-1]+1}} = \sqrt{\frac{y^3\left[\frac{1}{3}\lg y - \frac{1}{9}\right] + 1}{y[\lg y - 1] + 1}}.$$

Die Schwingungspunkte in Bezug auf beide Achsen sind

$$y_m = \frac{T'_y}{M'_y} = \frac{e^x\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x - 2\right] + 2}{e^x\left[\frac{x^2}{2} - x + 1\right] - 1}$$

$$= \frac{y\left[\frac{1}{3}(\lg y)^3 - \lg(y)^2 + 2\lg y - 2\right] + 2}{y\left[\frac{1}{2}(\lg y)^2 - \lg y + 1\right] - 1},$$

$$x_m = \frac{T'_x}{M'_x} = \frac{e^{3x}\left[\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right] + 1}{e^{2x}\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right] + 1} = \frac{y^3\left[\frac{1}{3}\lg y - \frac{1}{9}\right] + 1}{y^2\left[\frac{1}{2}\lg y - \frac{1}{4}\right] + 1}.$$

Auf die mit $\frac{M_{xy}}{M_x}$, $\frac{M_{xy}}{M_y}$, $\frac{M'_{xy}}{M'_x}$ und $\frac{M'_{xy}}{M'_y}$ zusammenhängenden physikalischen Dinge braucht nur hingewiesen zu werden.

Auch der durch Drehung um die X-Achse aus der Kurve $y = e^x$ entstehende Körper läfst sich nach jeder Richtung bequem berechnen. Denn Querschnitt

$$q_x = y^2\pi = e^{2x}\pi = \pi\left[1 + \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \cdots\right],$$

folglich Inhalt

$$\overset{x}{\underset{0}{J}} = \pi\left[\frac{x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \frac{4x^3}{3!} + \frac{8x^4}{4!} + \cdots\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \cdots\right]$$

oder

$$\overset{x}{\underset{0}{J}} = \frac{\pi}{2}[e^{2x} - 1].$$

Sein statisches Moment in Bezug auf die durch die Y-Achse dargestellte Ebene ist aus der Querschnittsformel

$$q_x = xy^2\pi = xe^{2x}\pi = \pi x\left[1 + \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \cdots\right]$$
$$= \pi\left[x + \frac{2x^2}{1!} + \frac{4x^3}{2!} + \frac{8x^4}{3!} + \cdots\right]$$

zu berechnen. Es ergiebt sich

$$\overset{x}{\underset{0}{M}} = \pi\left[\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{1!\,3} + \frac{4x^4}{2!\,4} + \frac{8x^5}{3!\,5} + \cdots\right]$$
$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{1!\,3} + \frac{16x^4}{2!\,4} + \frac{32x^5}{3!\,5} + \cdots\right]$$
$$= \frac{\pi}{4}\left[(2x)^2\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + (2x)^3\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + (2x)^4\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \cdots\right]$$
$$= \frac{2x\pi}{4}\left[\frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots\right] - \frac{\pi}{4}\left[\frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots\right]$$
$$= \frac{2x\pi}{4}[e^{2x} - 1] - \frac{\pi}{4}\left[e^{2x} - 1 - \frac{2x}{1}\right] = \frac{\pi e^{2x}}{4}[2x - 1] - \frac{\pi}{4}[2x - 1 - 2x]$$

oder endlich

$$\overset{x}{\underset{0}{M}} = \frac{\pi e^{2x}}{4}[2x - 1] + \frac{\pi}{4}.$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf dieselbe Ebene folgt aus der Querschnittsformel

$$q_x = y^2\pi x^2 = \pi x^2 e^{2x} = \pi x^2\left[1 + \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \cdots\right]$$
$$= \pi\left[x^2 + \frac{2x^3}{1!} + \frac{4x^4}{2!} + \frac{8x^5}{4!} + \cdots\right].$$

Es folgt

$$\overset{x}{\underset{0}{T}} = \pi\left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^4}{1!\,4} + \frac{4x^5}{2!\,5} + \frac{8x^6}{4!\,6} + \cdots\right].$$

Die Zerlegung in Nr. 195 giebt

$$\overset{x}{\underset{0}{T}} = \frac{\pi}{8}\left[(2x)^3\left(\tfrac{1}{1!} - \tfrac{2}{2!} + \tfrac{2}{3!}\right) + (2x)^4\left(\tfrac{1}{2!} - \tfrac{2}{3!} + \tfrac{2}{4!}\right) + (2x)^5\left(\tfrac{1}{3!} - \tfrac{2}{4!} + \tfrac{2}{5!}\right) + \cdots\right]$$
$$= \frac{\pi}{8}(2x)^2\left[\frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots\right] - \frac{2\pi}{8}(2x)\left[\frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots\right]$$
$$+ \frac{2\pi}{8}\left[\frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^5}{5!} + \cdots\right]$$
$$= \frac{2x^2\pi}{4}[e^{2x} - 1] - \frac{2x\pi}{4}\left[e^{2x} - 1 - \frac{2x}{1}\right] + \frac{\pi}{4}\left[e^{2x} - 1 - \frac{2x}{1} - \frac{4x^2}{2}\right]$$
$$= \frac{\pi}{4}e^{2x}[2x^2 - 2x + 1] - \frac{\pi}{4}[2x^2 - 2x - 4x^2 + 1 + 2x + 4x^2]$$
$$= \frac{\pi}{4}e^{2x}[2x^2 - 2x + 1] - \frac{\pi}{4}[2x^2 + 1].$$

Der durch Drehung um die Y-Achse entstehende Körper kann mit Hülfe der Querschnittsformel

$$x^2\pi = \pi\,[\lg(1+z)]^2 = \pi\left[\frac{z^1}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots\right]^2$$

behandelt werden. Einfacher geschieht die Berechnung jedes seiner beiden Teile, indem man von dem durch Drehung des Rechtecks $ABCD$ entstehenden Cylinder den vorher berechneten Körper abzieht. Ebenso verfährt man mit dem statischen und dem Trägheits-Momente.

Damit kann die Untersuchung von $y = e^x$ und $x = {}^e\lg y$ abgeschlossen und als Beispiel für die Behandlung anderer transcendenter Kurven hingestellt werden.

D. Die Schichtenformel für Kreisbogen.

196) Die Tragweite der Schichtenformel läfst sich dadurch erweitern, dafs man sie auch auf concentrische Kreisbogen anwendet. Ein Beispiel wird dies klären.

Kreisbogen und Kreisfläche. Die Kreislinie von Radius r hat den Umfang $2r\pi$. Ihre sämtlichen Punkte haben vom Centrum die Entfernung r. Während also

$$q_r = 2r\pi$$

als Querschnitt aufzufassen ist, kann man

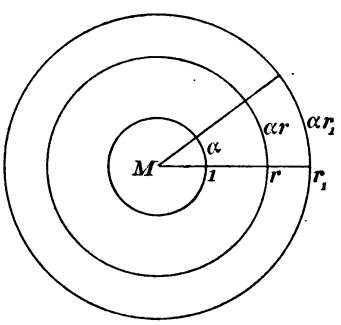
$$q_r = (2r\pi)\,r = 2r^2\pi$$

als Polarmoment erster Ordnung,

$$q_r = (2r\pi)\,r^2 = 2r^3\pi$$

als Polarmoment zweiter Ordnung betrachten.

Fig. 150.



Demnach wird die Fläche des Kreises von 0 bis r

$$\overset{r}{F}_0 = 2\pi\frac{r^2}{2} = r^2\pi,$$

das Polarmoment erster Ordnung der Kreisfläche

$$M_p = \frac{2\pi r^3}{3},$$

das Polarmoment zweiter Ordnung der Kreisfläche

$$T_p = \frac{2\pi r^4}{4} = \frac{r^4\pi}{2}.$$

Letzteres ist das polare Trägheitsmoment.

Das Polarmoment erster Ordnung findet Anwendung z. B. bei der Untersuchung der mittleren Drehungsgeschwindigkeit für den Fall, dafs die Fläche sich um eine Achse dreht, die senkrecht zu ihrer Ebene steht. Ist ϑ die auf den Radius r reduzierte Geschwindigkeit, so ist für jedes in der Entfernung r liegendes Flächenteilchen die sogenannte Bewegungsquantität

$$mv = mr\vartheta,$$

für den entsprechenden Kreisbogen also $(2r\pi)\,r\vartheta = 2r^2\pi\vartheta$, und für die Gesamtfläche

$$2\pi\vartheta\frac{r^3}{3} = M_p\vartheta.$$

Ist nun v_m die mittlere Geschwindigkeit der Fläche, so ist zu setzen

$$v_m F = M_p\vartheta = 2\pi\vartheta\frac{r^3}{3},$$

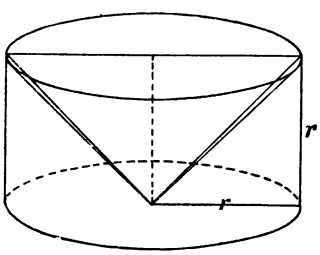
folglich ist die mittlere Geschwindigkeit

$$v_m = \frac{M_p}{F}\vartheta = \frac{\frac{2\pi\vartheta r^3}{3}}{2\pi\frac{r^2}{2}} = \frac{2}{3}r\vartheta.$$

Der Radius der mittleren Geschwindigkeit ist also

$$r_m = \frac{M_p}{F} = \frac{\frac{2\pi r^3}{3}}{2\pi\frac{r^2}{2}} = \frac{2}{3}r.$$

Fig. 151.



Seine Bedeutung ist die, dafs die in ihm vereinigt gedachte Masse dieselbe Bewegungsquantität giebt. Man kann sich das Polarmoment veranschaulichen als den Aufsenkörper, der dadurch entsteht, dafs man aus dem über der Fläche stehenden Cylinder (bezw. Säule) einen Kegel von 45° Seitenneigung ausschneidet.

197) Für den Kreissektor erhält man in entsprechender Weise, wenn α der zum Radius 1 gehörige Bogen des Sektors ist, als Querschnitt $q_r = \alpha r$, als Fläche $\overset{r}{\underset{0}{F}} = \frac{\alpha r^2}{2}$, als Polarmoment erster Ordnung $M_p = \frac{\alpha r^3}{3}$, als Polarmoment zweiter Ordnung $T_p = \frac{\alpha r^4}{4}$.

Für den Sektor des concentrischen Kreisrings ergiebt sich als Fläche

$$\overset{r_2}{\underset{r_1}{F}} = \frac{\alpha}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right),$$

als Polarmoment erster Ordnung

$$M_p = \frac{\alpha}{3}\left(r_2^3 - r_1^3\right),$$

als Polarmoment zweiter Ordnung

$$T_p = \frac{\alpha}{4}\left(r_2^4 - r_1^4\right).$$

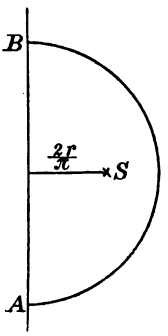
Der Radius mittlerer Geschwindigkeit wird

$$r_m = \frac{2}{3}\frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2},$$

was noch durch $r_2 - r_1$ gekürzt werden könnte.

198) Dies eignet sich nicht nur für die Berechnung der Polarmomente, sondern auch für die Berechnung der axialen Momente, nur mufs man dann das Nötige für den Einzelbogen bereits berechnet haben.

Fig. 152.



Beispiel der Halbkreisfläche.

Der Schwerpunkt des Halbkreisbogens liegt in der Entfernung $\frac{2r}{\pi}$, sein Axialmoment erster Ordnung ist also $r\pi\frac{2r}{\pi} = 2r^2$. Folglich ist das statische Moment der Halbkreisfläche in Bezug auf AB $M_y = \frac{2r^3}{3}$. Der Schwerpunktsabstand also ist

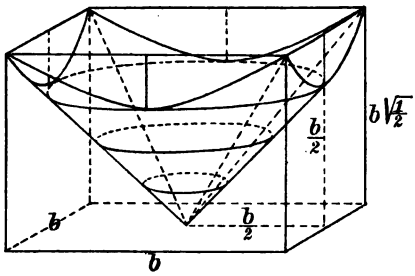
$$y_s = \frac{M_y}{F} = \frac{\frac{2}{3}r^3}{\frac{r^2\pi}{2}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Das polare Trägheitsmoment des Halbkreisbogens ist $r\pi r^2$, das axiale also $\frac{r\pi r^2}{2} = \frac{r^3\pi}{2}$. Daher ist für die ganze Fläche

$$T_y = \frac{\pi}{2}\frac{r^4}{4} = \frac{r^4\pi}{8}.$$

199) Die Polarmomente erster Ordnung sind nicht so leicht und elegant zu behandeln wie die der zweiten Ordnung, da weder ein Verschiebungssatz von einfacher Form besteht, noch eine einfach zu behandelnde Beziehung zu den M_x und M_y. So bietet z. B. die Aufgabe, das Polarmoment erster Ordnung für ein Quadrat zu berechnen und daraus den Punkt mittlerer Geschwindigkeit zu bestimmen,

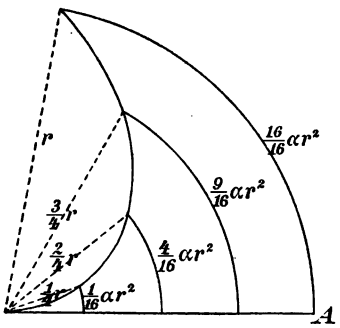
Fig. 153.



für die elementare Behandlung mancherlei Schwierigkeiten. Es würde sich um den Körper handeln, der stehen bleibt, wenn der Kegel von 45^0 Seitenneigung aus der quadratischen Säule ausgeschnitten wird, bei dem also hyperbolische Grenzlinien auftreten*).

200) Dagegen lassen sich leichte Betrachtungen über Spiralen anschliefsen. Zunächst gelten die für den Kreissektor abgeleiteten Formeln auch für den entsprechenden Raum zwischen zwei kongruenten Spiralen irgend welcher Art, die gegeneinander um den Winkel α gedreht sind.

Fig. 154.



Bei der Archimedischen Spirale sind die Bogen, vom Anfangsradius MA aus gerechnet, proportional dem Quadrate des Radius. Die Querschnittsformel wird also z. B.

$$q_r = ar^2.$$

Verhalten sich in der Figur die Bogen wie $1:4:9:16$, so entspricht dies Winkeln ϑ, 2ϑ, 3ϑ, 4ϑ. Die Berechnungen geschehen ganz nach Art der Parabel zweiter Ordnung. Die Fläche wird $\overset{r}{\underset{0}{F}} = \frac{ar^3}{3} = \frac{2}{3}$ Sektor. Das Polarmoment erster Ordnung wird $M_p = \frac{ar^4}{4}$, das Polarmoment zweiter Ordnung $T_p = \frac{ar^5}{5}$. Der Radius mittlerer Drehungsgeschwindigkeit hat die Länge $r_m = \frac{3}{4}r$, der Trägheitsradius die Länge $\frac{3}{5}r$.

Für die Spirale nächsthöherer Ordnung ist $q_r = ar^3$, für sie ist

$$\overset{r}{\underset{0}{F}} = \frac{ar^4}{4} = \frac{1}{2} \text{ Sektor}, \quad M_p = \frac{ar^5}{5}, \quad T_p = \frac{ar^6}{6}, \quad \text{u. s. w.}$$

Für die Spirale mit Querschnittsformel $q_r = a\frac{1}{r}$ ist die Fläche

*) Analytisch kommt die Sache auf die Integration eines cyklometrischen Ausdrucks hinaus, die sich nur mit Hülfe langwieriger Reihenbetrachtungen elementar umgehen läfst. Später aber soll ein Abbildungsverfahren angegeben werden, durch welches sich die Aufgabe bequem erledigt.

von $r = 1$ aus zu rechnen und ergiebt sich als $\overset{r}{\underset{1}{F}} = a\,{}^e\lg r$. Dagegen ist, von 0 bis r gerechnet $M_p = a\frac{r}{1}$, $T_p = a\frac{r^2}{2}$.

Für die Spirale mit Querschnittsformel $q_r = a\frac{1}{r^2}$ ist die Fläche von 1 bis ∞ gerechnet $\overset{\infty}{F} = -\frac{ar^{-1}}{-1} = \frac{a}{r}$, das Polarmoment erster Ordnung von 1 bis r gerechnet, $M_p = a\,{}^e\lg r$, das Trägheitsmoment

$$T_p = \frac{ar}{1}.$$

Die Analogie mit den Parabeln ist also eine vollkommene und soll hier nur deshalb nicht weiter erörtert werden, weil der Gegenstand für die Technik von geringerer Bedeutung ist.

Bei der logarithmischen Spirale $r = \varkappa e^{\vartheta}$ oder $\vartheta = {}^e\lg\frac{r}{\varkappa}$ handelt es sich um die Querschnittsformel $q_r = r\vartheta = r\,{}^e\lg\frac{r}{\varkappa}$. Dabei hat man sich für die elementare Behandlung der bekannten Reihenentwickelung zu bedienen und auf die Reihe die Schichtenformel anzuwenden.

Für die Kugel sei beiläufig bemerkt, dafs der Schwerpunkt des Meridiankeils, der nach 50) für sehr kleine Keilwinkel α in der Entfernung $\frac{3\pi}{16}r$ liegt, der Punkt mittlerer Drehungsgeschwindigkeit ist, denn bei unendlich kleinem α fällt der Punkt mittlerer Entfernung von der Achse mit dem Punkte mittlerer Entfernung von der entsprechenden Ebene zusammen, so dafs es sich in beiden Fällen um den Schwerpunkt des Keils handelt. Die Bewegungsquantität der Kugel ist also

$$\frac{3\pi}{16}r \cdot \tfrac{4}{3}r^3\pi\vartheta = \frac{r^4\pi^2}{4}\vartheta,$$

wenn ϑ die Winkelgeschwindigkeit ist.

Der darin liegende Schlufs ist dadurch gerechtfertigt, dafs die Schwerpunkte der Teilkörper sämtlich auf einem Kreise liegen.

Für Drehungskörper also handelt es sich stets um den durch $\frac{T}{M}$ gegebenen Punkt, sobald die Hauptachse des Körpers mit der Drehungsachse zusammenfällt. Darin liegt eine neue Bedeutung für diese wichtige Formel. Sie giebt die Punkte mittlerer Entfernung von der Hauptachse für Drehungskörper an.

Um allgemeineres über Kreissegmente und Kreisabschnitte zu erhalten, löse man folgende

201) **Hülfsaufgabe.** Der Kreisbogen mit Winkel α hat in Bezug auf den senkrecht zur Symmetrieachse stehenden Durchmesser welches Trägheitsmoment?

Auflösung. Man projiziere jedes Bogenteilchen s auf die zum Durchmesser parallele Tangente EF, dann ist $xs = \frac{h}{n} \cdot r$, eine Bemerkung, die man von der Berechnung der Kugelkalotte bezw. Zone her kennt $\left(2x\pi s = 2r\pi \frac{h}{n}\right)$. Demnach ist bei Einteilung in gleiche $\frac{h}{n}$

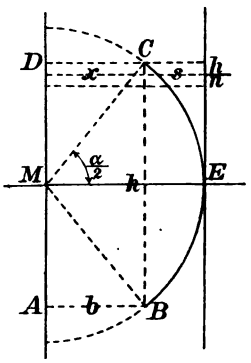
$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 + \cdots = \frac{h}{n} r + \frac{h}{n} r + \frac{h}{n} r + \cdots,$$

und

$$\sum s x^2 = s_1 x_1^2 + s_2 x_2^2 + s_3 x_3^2 + \cdots = hr \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_4}{n}.$$

Der letzte Bruch bedeutet, da auch AD in gleiche Teile, deren Zahl unendlich groſs zu nehmen ist, eingeteilt wurde, die mittlere Höhe des Flächenstückes $ABECD$ über der Grundlinie AD. Diese ist also

Fig. 155.



$$x_m = \frac{\text{Sektor } MBEC + 2\,\Delta MCD}{\text{Grundlinie } h} = \frac{r^2\pi \frac{\alpha^0}{360^0} + \frac{1}{2} bh}{h}$$

oder

$$x_m = \frac{r^2\pi \frac{\alpha}{360} + \frac{1}{2} r \cos\frac{\alpha}{2}\, 2r \sin\frac{\alpha}{2}}{h} = \frac{r^2\pi \frac{\alpha}{360} + \frac{r^2}{2} \sin\alpha}{h}.$$

Demnach ist

$$\sum s x^2 = hr x_m = hr \frac{r^2\pi \frac{\alpha}{360} + \frac{r^2}{2} \sin\alpha}{h}$$

oder

$$T_y = \sum s x^2 = r^3 \left[\pi \frac{\alpha}{360} + \frac{1}{2} \sin\alpha\right]$$

das gesuchte Trägheitsmoment.

[Probe für $\alpha = 180^0$ giebt $\frac{r^3\pi}{2}$, was die Hälfte von $r^3\pi$ und der vierte Teil von $(2r\pi) r^2$ ist. Letzteres aber ist offenbar das polare Trägheitsmoment der Kreislinie für ihren Mittelpunkt.]

Nach der zur Probe gemachten Bemerkung ist für den Mittelpunkt M

$$T_p = 2r^3\pi \frac{\alpha^0}{360^0} = r^3\pi \frac{\alpha^0}{180^0}$$

das polare Trägheitsmoment des Bogens, demnach ist das andere axiale

$$T_x = T_p - T_y = 2r^3\pi\frac{\alpha}{360} - r^3\pi\frac{\alpha}{360} - r^3\frac{1}{2}\sin\alpha$$

oder

$$T_x = r^3\left[\pi\frac{\alpha}{360} - \frac{1}{2}\sin\alpha\right].$$

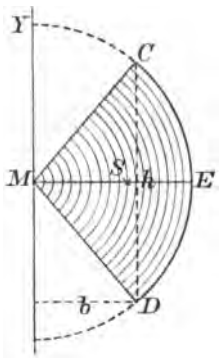
202) **Aufgabe.** Das Trägheitsmoment des Kreisausschnittes (Sektors) in Bezug auf den zur Symmetrieachse senkrecht stehenden Durchmesser zu finden.

Auflösung. Die vorige Formel gilt für jeden einzelnen der in Fig. 156 gezeichneten Bogen innerhalb des Sektors. Faſst man aber in

$$q_r = r^3\left(\pi\frac{\alpha}{360} + \frac{1}{2}\sin\alpha\right)$$

r als veränderliche Gröſse auf, so geht nach der Schichtenformel, die auch hier angewandt werden darf, r^3 in $\frac{r^4}{4}$ über, so daſs man für die Sektorfläche hat

Fig. 156.



$$T_y = \frac{r^4}{4}\left[\pi\frac{\alpha}{360} + \frac{1}{2}\sin\alpha\right] = \frac{r^4}{8}\left[\pi\frac{\alpha}{180} + \sin\alpha\right].$$

(Probe: Ist $\alpha = 180^0$, so folgt $T_y = \frac{r^4\pi}{8}$, was mit dem Früheren übereinstimmt. Ebenso ist für $\alpha = 90^0$

$$T_y = \frac{r^4}{4}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right] = \frac{r^4}{16}(\pi + 2).$$

Ebenso für $\alpha = 45^0$

$$T_y = \frac{r^4}{4}\left[\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right] = \frac{r^4}{32}[\pi + 2\sqrt{2}].)$$

Für den Sektor ist ferner

$$T_p = \frac{r^4\pi}{2}\frac{\alpha}{360} = \frac{r^4\pi\alpha}{720},$$

folglich ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Symmetrieachse ME

$$T_x = T_p - T_y = \frac{r^4}{4}\left[\pi\frac{\alpha}{360} - \frac{1}{2}\sin\alpha\right] = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right].$$

Der Schwerpunktsabstand ist nach Nr. 10

$$e_s = \frac{2rh}{3b} = \frac{240r\sin\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}.$$

Die Reduktion auf den Schwerpunkt giebt

$$T_p = \frac{r^4\pi}{2}\frac{\alpha}{360} - \frac{240^2 r^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\pi^2\alpha^2}\cdot r^2\pi\frac{\alpha}{360} = \frac{r^4\pi}{2}\frac{\pi}{360} - \frac{160 r^4 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}$$

$$= r^4\left[\frac{\pi\alpha}{720} - \frac{160\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}\right].$$

Ebenso ist dann

$$T_x = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right]$$

$$T_y = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} + \sin\alpha\right] - \frac{160 r^4 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}.$$

203) **Aufgabe.** Die Trägheitsmomente des Kreisabschnittes zu finden.

Auflösung. In Fig. 156 war für den Durchmesser

$$T_y' = \frac{r^2}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} + \sin\alpha\right].$$

Abzuziehen ist für das Dreieck MDC

$$T_y'' = \frac{hb^3}{4} = \frac{2r\sin\frac{\alpha}{2}\, r^3\cos^3\frac{\alpha}{2}}{4} = \frac{r^4\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4} = \frac{r^4\sin\alpha\,(1+\cos\alpha)}{8}.$$

Demnach wird für das Segment BEC in Bezug auf den Durchmesser

$$T_y = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} + \sin\alpha - \sin\alpha\,(1+\cos\alpha)\right] = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\cos\alpha\right]$$

oder

1) $$T_y = \frac{r^4}{16}\left[\frac{\pi\alpha}{90} - \sin 2\alpha\right].$$

Für ME war

$$T_x' = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right].$$

Abzuziehen ist für Dreieck MDC

$$T_x' = \frac{bh^3}{48} = \frac{r\cos\frac{\alpha}{2}\left(2r\sin\frac{\alpha}{2}\right)^3}{48} = \frac{r^4\cdot 4\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{48}$$

oder

$$T_x' = \frac{r^4\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}}{12} = \frac{r^4\sin\alpha\,(1-\cos\alpha)}{24}.$$

Demnach wird für das Segment in Bezug auf ME

$$T_x = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha - \frac{1}{8}\sin\alpha(1-\cos\alpha)\right] = \frac{r^4}{24}\left[\frac{\pi\alpha}{60} - 4\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha\right]$$

oder

$$T_x = \frac{r^4}{24}\left[\frac{\pi\alpha}{60} - 4\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right] = \frac{r^4}{48}\left[\frac{\pi\alpha}{30} - 8\sin\alpha + \sin 2\alpha\right].$$

Addiert man dazu

$$T_y = \frac{r^4}{48}\left[\frac{\pi\alpha}{30} + 3\sin 2\alpha\right],$$

so erhält man in Bezug auf M

$$T_p = \frac{r^4}{48}\left[\frac{\pi\alpha}{30} - 8\sin\alpha + \sin 2\alpha + \frac{\pi\alpha}{30} + 3\sin 2\alpha\right]$$
$$= \frac{r^4}{48}\left[\frac{\pi\alpha}{15} - 8\sin\alpha + 4\sin 2\alpha\right].$$

Die Reduktion auf den Schwerpunkt geschieht mit Hülfe von $e_s^2 F$, wo

$$e_s = \frac{h^3}{12F} = \frac{h^3}{6r^2\left(\pi\frac{\alpha}{180} - \sin\alpha\right)}.$$

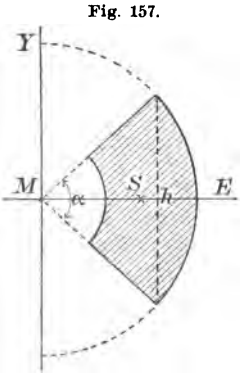
Es ist also für T_y und T_p abzuziehen

$$\frac{h^6}{144F^2}F = \frac{h^6}{144F} = \frac{2^6 \cdot r^6 \sin^6\frac{\alpha}{2}}{2^4 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{2} r^2\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right]} = \frac{8r^6\sin^6\frac{\alpha}{2}}{9r^2\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right]}$$
$$= \frac{160 r^4 \sin^6\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha - 180\sin\alpha}.$$

(Probe für den Halbkreis stimmt.)

Bemerkung. Diese Aufgabe ist von Wichtigkeit für die Centrifugentheorie, denn bei etwa kugelförmiger Gestalt kann der Querschnitt der schnell rotierenden Flüssigkeit als Kreissegment betrachtet werden. Formel 1) ist in die Formel $K = \frac{2k'}{g} T\vartheta^2$ in Nr. 49 einzusetzen.

Fig. 157.



204) **Aufgabe.** Die Trägheitsmomente des Ringsektors zu berechnen.

Nach 44 handelt es sich in Bezug auf den Durchmesser um

$$T_y = \frac{r^4 - r_1^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right],$$

in Bezug auf ME um

$$T_x = \frac{r^4 - r_1^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right],$$

und in Bezug auf M um

$$T_p = \frac{r^4 - r_1^4}{720}\pi\alpha.$$

Da nach 11

$$MS = e_s = \frac{2h}{3\widehat{b}}\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2} = \frac{2\cdot 2r\sin\frac{\alpha}{2}}{3\cdot 2r\pi\frac{\alpha}{360}}\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2} = \frac{240\sin\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}\frac{r^3 - r_1^3}{r_2 - r_1^2}$$

ist, so mufs für T_p und T_y

$$e_s^2 F = \frac{240^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\pi^2\alpha^2}\frac{(r^3 - r_1^3)^2}{(r^2 - r_1^2)^2}\frac{(r^2 - r_1^2)\pi\alpha}{360} = \frac{160\sin^2\frac{\alpha}{2}(r^3 - r_1^3)^2}{\pi\alpha(r^2 - r_1^2)}$$

abgezogen werden, wenn man die Reduktion auf den Schwerpunkt durchführen will.

205) **Aufgabe.** Die maximalen Centrifugalmomente in Bezug auf M für die letzten Querschnitte zu berechnen.

Auflösung. Sektor:

$$M_{xy} = \frac{T_y - T_x}{2} = \frac{r^4}{16}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - 3\sin\alpha\right] - \frac{r^4}{16}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right]$$
$$= \frac{2r^4\sin\alpha}{16} = \frac{r^4\sin\alpha}{8}.$$

Segment:

$$M_{xy} = \frac{T_y - T_x}{2} = \frac{r^4}{96}\left[\frac{\pi\alpha}{30} - 3\sin 2\alpha\right] - \frac{r^4}{96}\left[\frac{\pi\alpha}{30} - 8\sin\alpha + \sin 2\alpha\right]$$
$$= \frac{r^4}{96}[8\sin\alpha - 4\sin 2\alpha] = \frac{r^4}{24}[2\sin\alpha - \sin 2\alpha].$$

Ringsektor:

$$M_{xy} = \frac{T_y - T_x}{2} = \frac{r^4 - r_1^4}{16}\left[\frac{\pi\alpha}{180} + \sin\alpha\right] - \frac{r^4 - r_1^4}{16}\left[\frac{\pi\alpha}{160} - \sin\alpha\right]$$
$$= \frac{r^4 - r_1^4}{16}2\sin\alpha = \frac{r^4 - r_1^4}{8}\sin\alpha.$$

206) **Bemerkung.** Die hier durchgeführte Methode läfst sich nicht nur auf concentrische Kreise, sondern auch auf Parallelkurven anwenden, die bekanntlich durch Abwickelung einer gemeinschaftlichen Evolute entstehen. Hierher gehört z. B. die Inhaltsberechnung der Kreisevolvente. Dagegen ist die Anwendung auf die Doppelschar gleichseitiger Hyperbeln, auf die konfokalen Ellipsen und Hyperbeln, auf konfokale Lemniskatenscharen und Hyperbelbüschel u. s. w. ausgeschlossen, weil hier die Breite der Elementarstreifen veränderlich

ist, so dafs die Anwendung der Rechtecksformel $\frac{h}{n} \cdot l$, wo $\frac{h}{n}$ die Breite, l die Länge des Streifens ist, unzulässig erscheint. Dort müssen also andere Methoden eintreten. Auf die Evolventen soll erst im nächsten Bande eingegangen werden.

E. Einige Aufgaben über Maxima und Minima.

207) Nach dem Methodischen Lehrbuche Teil II, Anhang, ist, wenn die Querschnittsformel einer Kurve die Gestalt

$$x = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \cdots$$

hat, die Neigung der Tangente gegen die Y-Achse an der Stelle y zu berechnen aus

$$\tan \alpha = b + 2cy + 3dy^2 + 4ey^3 + \cdots.$$

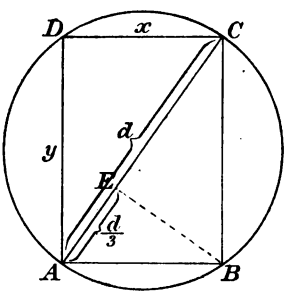
Ein Maximum oder Minimum kann im allgemeinen nur dann stattfinden, wenn dieser Wert gleich Null ist. Die fraglichen Stellen berechnen sich also aus

$$b + 2cy + 3dy^2 + 4ey^3 + \cdots = 0.$$

Die wirkliche Auswertung kann elementar höchstens bis zum 4ten Grade gehen. Trotzdem lassen sich einige wichtige Aufgaben mit Hülfe solcher Betrachtungen erledigen, wie die nachstehenden Beispiele zeigen.

Die Untersuchung, ob an entsprechender Stelle ein Maximum oder ein Minimum stattfindet, oder ob die Kurve dort einen Rückkehrpunkt (eine Spitze), oder einen Wendepunkt oder sonstige Unregelmäfsigkeiten hat, läfst sich nur mit Hülfe der höheren Differentialquotienten hinlänglich scharf entscheiden. Darauf soll hier nicht eingegangen werden.

Fig. 158.

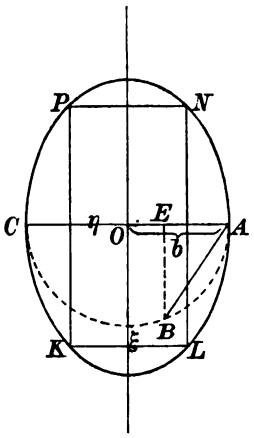


208) **Aufgabe.** Aus einem kreisrunden Balken den rechteckigen Balken von gröfster Tragfähigkeit auszuschneiden.

Auflösung. Die Tragfähigkeit ist, wie in der Festigkeitslehre gezeigt wird, proportional dem Ausdrucke $\frac{xy^2}{6}$, oder auch $xy^2 = x(d^2 - x^2) = d^2x - x^3$. Stellt man $z = d^2x - x^3$ graphisch dar, so ergiebt sich als trigonometrische Tangente der geometrischen Tangente $\tan \alpha = d^2 - 3x^2$. Eine Maximalstelle ist nur möglich, wenn $d^2 - 3x^2 = 0$ ist, d. h. $x^2 = \frac{d^2}{3}$ oder $x = d\sqrt{\frac{1}{3}}$. Man kann x

konstruieren als mittlere Proportionale zwischen d und $\frac{d}{3}$, indem man z. B. $AE = \frac{d}{3}$ macht und in E das Lot EB errichtet, was nach Pythagoras $AB = x$ giebt.

Fig. 159.



209) **Aufgabe.** Dieselbe Aufgabe für einen elliptischen Balken.

Die Gleichung der Ellipse sei $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$, die gesuchte Basis sei ξ, die zugehörige Höhe η. Die Tragfähigkeit ist proportional dem Ausdrucke $\xi\eta^2$, oder, da $\xi = 2x$ und

$$\eta^2 = (2y)^2 = 4\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)a^2 = 4a^2 - \frac{4a^2x^2}{b^2}$$

ist, proportional $8a^2x - \frac{8a^2x^3}{b^2}$, oder auch proportional $x - \frac{x^3}{b^2}$. Stellt man aber $z = x - \frac{x^3}{b^2}$ graphisch als Kurve dar, so ist ein Maximum nur möglich bei der durch $1 - \frac{3x^2}{b^2} = 0$ bestimmten Stelle, so dafs $x = b\sqrt{\frac{1}{3}}$ folgt, wie vorher, also $\xi = 2b\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Die Konstruktion erfolgt wie vorher. Man macht $AE = \frac{1}{3}AC$, errichtet das Lot EB bis zum Hülfskreise, dann ist AB die gesuchte Strecke ξ, der KL gleich zu machen ist.

210) **Aufgabe.** Dieselbe Aufgabe für einen parabolischen Querschnitt, der einem Rechteck mit den Seiten $2x_1$ und y_1 einbeschrieben ist.

Auflösung. Die Gleichung der Parabel ist $x^2 = 2py$, wo sich der Parameter p aus $x_1^2 = 2py_1$ als $p = \frac{x_1^2}{2y_1}$, bestimmt. Die Tragfähigkeit des einzubeschreibenden Rechtecks wird proportional zu $\xi\eta^2$, wo $\xi = 2x$ und $\eta = y_1 - y = y_1 - \frac{x^2}{2p}$ zu setzen ist. Für $\xi\eta^2$ ist also zu setzen

$$2x\left(y_1 - \frac{x^2}{2p}\right)^2$$

oder

$$2x\left(y_1^2 - \frac{2y_1x^2}{2p} + \frac{x^4}{4p^2}\right)$$

oder endlich, da der Faktor 2 überflüssig ist,

$$z = y_1^2x - \frac{y_1x^3}{p} + \frac{x^5}{4p^2}.$$

Stellt man z graphisch als Curve dar, so handelt es sich um die Stelle, wo

$$\tan\alpha = y_1^2 - \frac{3\,y_1}{p}\,x^2 + \frac{5\,x^4}{4\,p^2} = 0$$

ist. Das entsprechende x ergiebt sich aus der Gleichung

$$x^4 - \frac{12\,p\,y_1}{5}\,x^2 = -\frac{4\,p^2}{5}\,y_1^2,$$

aus der

$$x^2 = \frac{6\,p\,y_1}{5} \pm \sqrt{\frac{36\,p^2\,y_1^2}{25} - \frac{20\,p^2\,y_1^2}{25}}$$

$$= \frac{6\,p\,y_1}{5} \pm \frac{4\,p\,y_1}{5}$$

folgt, oder

$$x = \sqrt{\frac{10\,p\,y_1}{5}} \quad \text{bezw.} \quad x = \sqrt{\frac{2\,p\,y_1}{5}},$$

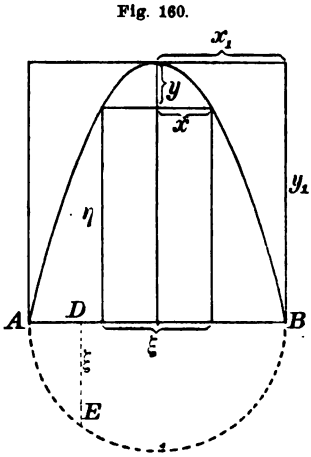
die Basis wird also entweder

$$\xi = 2\sqrt{\frac{10\,p\,y_1}{5}} = 2\sqrt{\frac{2\,x_1^2}{2\,y_1}\,y_1} = 2\,x_1$$

oder

$$\xi = 2\sqrt{\frac{2\,p\,y_1}{5}} = 2\sqrt{\frac{2\,x_1^2}{5\cdot 2\,y_1}\,y_1} = 2\,x_1\sqrt{\frac{1}{5}}.$$

Fig. 160.



Das erste giebt aber $\eta = 0$, d. h. einen Balken von der Tragfähigkeit Null, was hier kein Maximum, sondern höchstens ein Minimum bedeuten kann. Die zweite Lösung giebt ein Maximum, und zwar läfst sich $\xi = \sqrt{\frac{4\,x_1^2}{5}}$ als mittlere Proportionale zwischen $AB = 2\,x_1$ und $\frac{2}{5}\,x_1 = \frac{AB}{5}$ konstruieren. Ist also $AD = \frac{1}{5}\,AB$, so giebt das Lot DE bis zum Hülfskreise das gesuchte ξ.

211) Um eine Variante in der Behandlung der Aufgaben über Maxima und Minima bekannt zu geben, soll die in Nr. 141 behandelte Aufgabe, die Trägheitshauptachsen für eine Fläche F aus T_x, T_y und M_{xy} zu bestimmen, auf eine andere Art gelöst werden. Man wandle die Gleichung

$$T_\alpha = T_x\cos^2\alpha + T_y\sin^2\alpha - \sin 2\alpha\,M_{xy}$$

mit Ausnahme des letzten Postens ebenso um, wie in Nr. 141, was

$$T_\alpha = \tfrac{1}{2}(T_y + T_x) - \tfrac{1}{2}(T_y - T_x)\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\, M_{xy}$$

giebt. Hier ist rechts alles konstant, mit Ausnahme der Gröfse α. Es kommt also darauf an, zu untersuchen, wann die beiden letzten Glieder ein Maximum oder ein Minimum geben, d. h. wann ein Ausdruck von der Form

$$y = a\cos 2x + b\sin 2x$$

ein Maximum oder Minimum giebt.

Zu diesem Zwecke denke man sich den Ausdruck als Curve veranschaulicht und untersuche, an welcher Stelle die Tangente horizontal ist. Vergröfsert man die Abscisse um eine kleine Gröfse ξ, so geht die rechte Seite der Hülfsgleichung über in

$$a\cos 2(x+\xi) + b\sin 2(x+\xi).$$

Subtraktion der beiden rechten Seiten von einander giebt

$$a[\cos 2(x+\xi) - \cos 2x] + b[\sin 2(x+\xi) - \sin 2x].$$

Da die Nachbarordinaten bei horizontaler Tangente gleich sein müssen, so ist diese Differenz gleich Null zu setzen, also, wenn man nach bekannten goniometrischen Formeln umformt,

$$-\frac{a}{2}\sin\frac{(2x+2\xi)+2x}{2}\sin\frac{(2x+2\xi)-2x}{2}$$
$$+\frac{b}{2}\cos\frac{(2x+2\xi)+2x}{2}\sin\frac{(2x+2\xi)-2x}{2} = 0.$$

Division durch den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{1}{2}\sin\frac{(2x+2\xi)-2x}{2}$ giebt

$$-a\sin(2x+\xi) + b\cos(2x+\xi) = 0$$

oder

$$\tan(2x+\xi) = \frac{b}{a},$$

oder, da ξ unendlich klein gedacht werden sollte,

$$\tan 2x = \frac{b}{a}.$$

Setzt man für a und b die eigentlichen Faktoren wieder ein, so folgt wie früher

$$\tan(2\vartheta) = \frac{2M_{xy}}{T_y - T_x}$$

zur Bestimmung der Lage der beiden Hauptachsen.

[Setzt man die Reihenentwickelung für $\sin 2x$ und $\sin 2y$ als bekannt voraus und wendet man die Formel für den Neigungs-

winkel α der Tangente auf die Reihen an, wozu man Method. Lehrbuch Band 2, Anhang oder Band 3, Algebr. An. VI vergleiche, so findet man sofort als maſsgebende Gleichung

$$-2a\cos 2x + 2b\sin 2x = 0$$

oder

$$\tan 2x = \frac{b}{a}$$

zur Bestimmung der betreffenden Stelle. Damit würde eine dritte Lösung dieses wichtigen Problems gegeben sein.]

F. Verallgemeinerte Simpsonsche Regel.

212) Reichen die bisherigen Methoden zur Berechnung von Flächen oder Körpern oder ihrer Momente erster oder zweiter Ordnung nicht aus, so ist man zu Annäherungsversuchen genötigt.

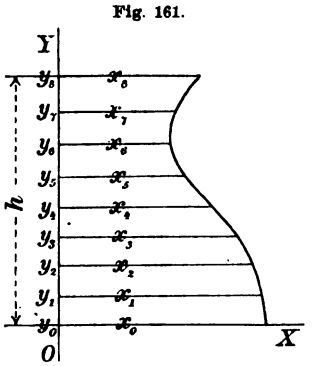
Eine erste Annäherung würde die Trapezformel geben, die darauf beruht, daſs man die einzelnen Streifen gleicher Höhe als Trapeze berechnet. Addiert man die Resultate, so ergiebt sich z. B. für Fig. 161, wo übrigens $y_0 = 0$ ist,

$$\overset{y_8}{\underset{y_0}{F}} = \frac{y_8 - y_0}{2 \cdot 8}\left[x_0 + x_8 + 2\,(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_7)\right].$$

Das Resultat wird einigermaſsen brauchbar, wenn die Kurve gegen die Y-Achse bald konkav, bald konvex ist. Das Resultat wird aber zu klein, wenn sie überall konkav, zu groſs, wenn sie überall konvex ist.

Es ist leicht, die Formel für $\overset{y_8}{\underset{y_1}{F}}$ oder $\overset{y_8}{\underset{y_2}{F}}$ u. s. w. aufzustellen.

Fig. 161.



213) Ein weit genaueres Resultat giebt in der Regel die verallgemeinerte Simpsonsche Formel, die darauf beruht, daſs man eine gerade Anzahl von Streifen annimmt und auf jeden Doppelstreifen die Simpsonsche Regel anwendet.

Thut man dies, so ergiebt sich z. B. für Fig. 161

$$\overset{y_8}{\underset{0}{F}} = \frac{y_8 - y_0}{6 \cdot 4}\left[x_0 + x_8 + 2\,(x_2 + x_4 + x_6) + 4\,(x_1 + x_3 + x_5 + x_7)\right],$$

allgemein für n Streifen oder $\frac{n}{2}$ Doppelstreifen

$$F = \int_{y_0}^{y_n}$$

$$= \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[x_0 + x_n + 2(x_2 + x_4 + \cdots + x_{n-2}) + 4(x_1 + x_3 + \cdots + x_{n-1}) \right].$$

Die Genauigkeit wird deshalb gröfser, weil sich durch je drei aufeinanderfolgende Kurvenpunkte unendlich viele Parabeln gemischter Ordnung vom 3ten Grade legen lassen, für welche die Simpsonsche Formel ein richtiges Resultat giebt. Irgend eine dieser Kurven wird sich in der Regel weit genauer an die wirkliche Kurve anschmiegen, als es die geraden Linien der Trapezformel thun.

214) Die Berechnung der statischen Momente würde nach der Trapezformel sehr ungenau ausfallen.

Die verallgemeineste Simpsonformel dagegen würde für Fig. 161 folgendes Resultat geben

$$M_x =$$

$$= \frac{y_8 - y_0}{6 \cdot 4} \left[x_0 y_0 + x_8 y_8 + 2(x_2 y_2 + x_4 y_4 + x_6 y_6) + 4(x_1 y_1 + x_3 y_3 + x_5 y_5 + x_7 y_7) \right].$$

Allgemein ergiebt sich für gerades n

$$M_x =$$

$$= \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[x_0 y_0 + x_n y_n + 2(x_2 y_2 + x_4 y_4 + \cdots + x_{n-2} y_{n-2}) + 4(x_1 y_1 + x_3 y_3 + \cdots + x_{n-1} y_{n-1}) \right].$$

215) Für das Trägheitsmoment ergiebt sich ebenso bei geradem n

$$T_x =$$

$$= \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[x_0 y_0^2 + x_n y_n^2 + 2\left(x_2 y_2^2 + x_4 y_4^2 + \cdots + x_{n-2} y_{n-2}^2\right) + 4(x_1 y_1^2 + x_3 y_3^2 + \cdots + x_{n-1} y_{n-1}^2) \right].$$

Um M_y und T_y zu berechnen, wird man zweckmäfsiger Weise die Streifenrichtung senkrecht gegen die vorige wählen.

216) Für die Centrifugalmomente müfste man bei Figur 161 folgendermafsen verfahren: Der erste Doppelstreifen würde nach Nr. 110 geben

$$\frac{y_2 - y_0}{6} \left[\frac{x_0^2}{2} y_0 + \frac{x_2^2}{2} y_2 + 4 \frac{x_1^2}{2} y_1 \right] = \frac{y_2 - y_0}{12} \left[x_0^2 y_0 + x_2^2 y_2 + 4 x_1^2 y_1 \right].$$

Die vollständige Formel würde lauten

$$M_{xy} =$$

$$= \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[\frac{x_0^2}{2} y_0 + \frac{x_n^2}{2} y_n + 2\left(\frac{x_2^2}{2} y_2 + \frac{x_4^2}{2} y_4 + \cdots + \frac{x_{n-2}^2}{2} y_{n-2} \right) + 4\left(\frac{x_1^2}{2} y_1 + \frac{x_3^2}{2} y_3 + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{2} y_{n-1} \right) \right]$$

oder

$$M_{xy} =$$

$$= \frac{y_n - y_0}{6n} \left[x_0^2 y_0 + x_n^2 y_n + 2\left(x_2^2 y_2 + x_4^2 y_4 + \cdots + x_{n-2}^2 y_{n-2} \right) + 4\left(x_1^2 y_1 + x_3^2 y_3 + \cdots + x_{n-1}^2 y_{n-1} \right) \right].$$

In der Regel wird die Formel nur für Körper verwendet, obwohl auch die Berechnung der genannten Momente für die Technik ganz brauchbare Resultate giebt. Als Beispiel könnte der in Fig. 28 dargestellte Schienenquerschnitt dienen. Auf die Schwerpunktsberechnung mit Hülfe von $\frac{M}{F}$, auf die mit Hülfe von $\sqrt{\frac{T}{F}}$, $\frac{T}{M}$, $\frac{M_{xy}}{F}$ durchzuführenden Berechnungen und ihre praktischen Anwendungen braucht hier nur hingedeutet zu werden.

217) Der durch Drehung um die Y-Achse aus Fig. 161 entstehende Körper würde folgendermafsen zu berechnen sein:

$$I_{y_0}^{y_n} = \pi \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[x_0^2 + x_n^2 + 2\left(x_2^2 + x_4^2 + \cdots + x_{n-2}^2 \right) + 4\left(x_1^2 + x_3^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \right) \right].$$

Sein statisches Moment in Bezug auf die Grundfläche würde sein:

$$M_u =$$

$$= \pi \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[x_0^2 y_0 + x_n^2 y_n + 2\left(x_2^2 y_2 + x_4^2 y_4 + \cdots + x_{n-2}^2 y_{n-2} \right) + 4\left(x_1^2 y_1 + x_3^2 y_3 + \cdots + x_{n-1}^2 y_{n-1} \right) \right].$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Grundfläche:

$$T_u =$$

$$= \pi \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[x_0^2 y_0^2 + x_n^2 y_n^2 + 2\left(x_2^2 y_2^2 + x_4^2 y_4^2 + \cdots + x_{n-2}^2 y_{n-2}^2 \right) + 4\left(x_1^2 y_1^2 + x_3^2 y_3^2 + \cdots + x_{n-1}^2 y_{n-1}^2 \right) \right].$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Y-Achse würde werden:

$$T_p = \frac{\pi}{2} \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[x_0^4 + x_n^4 + 2\left(x_2^4 + x_4^4 + \cdots + x_{n-2}^4 \right) + 4\left(x_1^4 + x_3^4 + \cdots + x_{n-1}^4 \right) \right].$$

Denselben Formeln gehorchen die Körper, die sich nach der Methode von Cavalieri aus dem Drehungskörper ableiten lassen. —

Die Annäherungsformeln geben um so bessere Werte, je mehr Schnitte man zu Hülfe nimmt und je weniger Unregelmäfsigkeiten das Profil zeigt. Als Beispiel berechne man das Trägheitsmoment der in Fig. 98 dargestellten Schiene, deren Mafse man zu bestimmen hat, indem man z. B. die Querschnitte für 6 Doppelstreifen von gleicher Breite abmifst.

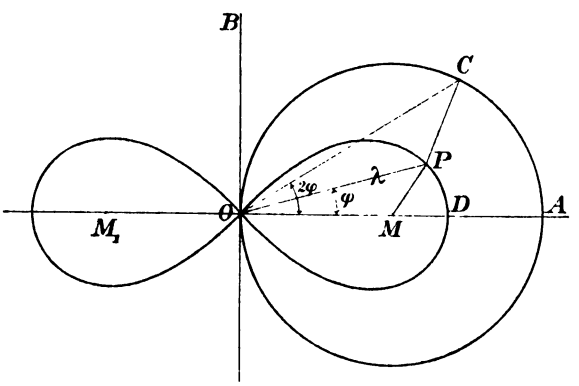
Für rein mathematische Untersuchungen sind die Methoden dieses Abschnitts unbrauchbar, dort müssen sie durch die strengen Methoden der höheren Mathematik ersetzt werden, wenn diese überhaupt der Aufgabe gewachsen ist.

Abschnitt VI.

Anwendung der lemniskatischen Abbildung auf die Bestimmung polarer Trägheitsmomente und polarer Momente erster Ordnung.

218) In Nr. 142 wurde eine Konstruktion besprochen, die einen Kreis in eine Lemniskate verwandelt. Macht man die entsprechende Transformation mit allen Punkten der Ebene, und trägt man, um die Zeichnung nicht zu verwirren, das „Bild" jedes Punktes in einer besonderen Zeichnungsebene ein, so ergeben sich für beide Ebenen interessante gegenseitige Beziehungen, die einen eigentümlichen Einblick in die höhere Mathematik und in die mathematische Physik geben und auch für den Techniker von Wichtigkeit sind.

Fig. 162.



Um das Bild P des Punktes C zu finden, hat man die mittlere Proportionale zwischen $OM = 1$ und OC als Winkelhalbierende einzutragen. Will man umgekehrt das Bild C zu P finden, so setze man auf die Seite OP des Dreiecks OMP das ähnliche Dreieck OPC.

219) Die erste Konstruktion verwandelt den Winkel $COM = \Phi = 2\varphi$ in den Winkel $POD = \varphi = \frac{\Phi}{2}$, den Radius $OC = R = r^2$ in den Radius $OP = \sqrt{OC} = r = \sqrt{R}$.

Die zweite verwandelt den Winkel φ in 2φ, den Radius r in r^2. [Die erste entspricht der Moivreschen Formel

$$\sqrt{R}\,(\cos\Phi + i\sin\Phi) = \sqrt{R}\,(\cos\tfrac{1}{2}\Phi + i\sin\tfrac{1}{2}\Phi),$$

die zweite der Formel

$$[r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^2 = r^2\,(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi).$$

Wegen dieses Zusammenhanges soll die erste Transformation als die Abbildung $z = \sqrt{Z}$, die zweite als die Abbildung $Z = z^2$ bezeichnet werden.

Auf den Zusammenhang mit der Lehre von den komplexen Gröfsen soll hier zu Gunsten der elementaren Darstellung nicht eingegangen werden. Die entsprechende Behandlung findet man in des Verfassers „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften".]

220) Zwischen den Polarkoordinaten aller Punkte beider Ebenen, von denen die eine die Z-Ebene, die andere die z-Ebene heifst, finden jetzt folgende Beziehungen statt:

Dem Punkte mit den Koordinaten R und Φ (bezw. $\Phi + 360^0$) entspricht in der Z-Ebene ein Punkt der z-Ebene mit den Koordinaten $r = \sqrt{R}$ und $\varphi = \frac{1}{2}\Phi$ $\left(\text{bezw. } \varphi = \frac{1}{2}\Phi + 180^0\right)$; dem Punkte der z-Ebene mit den Koordinaten r und φ (bezw. $\varphi + 180^0$) entspricht in der Z-Ebene ein Punkt mit den Koordinaten $R = r^2$ und $\Phi = 2\varphi$.

Dem um den Nullpunkt der Z-Ebene geschlagenen Kreise mit dem Radius $R = c$ entspricht in der z-Ebene der Kreis $r = \sqrt{c}$ oder $r^2 = c$; dem vom Nullpunkte der Z-Ebene ausgehenden Strahle von der Neigung $\Phi = \gamma$ (bezw. $\Phi = \gamma + 360^0$) entspricht in der z-Ebene ein Strahl von der Neigung $\varphi = \frac{\gamma}{2}$ oder $2\varphi = \gamma$ (bezw. $\varphi = \frac{\gamma}{2} + 180^0$ oder $2\varphi = \gamma + 360^0$).

Das doppelte Entsprechen beim Winkel giebt gewissermafsen die beiden Wurzelwerte an.

Umgekehrt geht jeder Kreis der z-Ebene, der mit Radius $r = c$ um den Nullpunkt geschlagen ist, über in einen Kreis $R = c^2$ oder $\sqrt{R} = c$ der Z-Ebene, jeder Strahl, der mit Neigung $\varphi = \gamma$ (bezw. $\gamma + 180^0$) vom Nullpunkte ausgeht, in einen Strahl $\Phi = 2\gamma$ oder $\frac{\Phi}{2} = \gamma$.

Jeder der genannten Kreise der Z-Ebene ist doppelt durchlaufen zu denken, wenn der der z-Ebene einmal durchlaufen wird, denn der Winkel 360^0 entspricht dem Winkel 180^0. Die ganze Z-Ebene wird auf der Halbebene z dargestellt, die zweischichtig mit Punkten zu bedeckende Z-Ebene auf der ganzen einschichtigen z-Ebene.

Auf das zweifache Entsprechen soll nur noch aufmerksam gemacht werden, wenn es besonders nötig erscheint.

221) Jeder Punktfolge oder Curve der einen Ebene entspricht eine Curve der andern. In Polarkoordinaten entsprechen einander die Curven

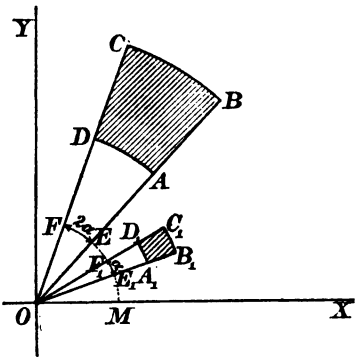
$$f(R, \Phi) = 0 \quad \text{und} \quad f[(r^2), (2\varphi)] = 0,$$

$$f\left[(\sqrt{R}), \left(\frac{\Phi}{2}\right)\right] = 0 \quad \text{und} \quad f(r, \varphi) = 0.$$

222) Wichtig ist nun Folgendes:

Jedem rechtwinkligen Flächenstücke $ABCD$ der Z-Ebene, welches von den besprochenen Kreisen und Geraden begrenzt wird, entspricht ein rechtwinkliges Flächenstück $A_1B_1C_1D_1$ der andern Ebene, und zwar wird behauptet, bei hinreichender Kleinheit seien beide „Rechtecke" einander ähnlich, ihre Maßstäbe verhielten sich wie $2\varrho : 1$, wo $\varrho = OA_1$, also $\varrho^2 = OA$ ist, ihre Flächen also wie $4\varrho^2 : 1$.

Fig. 168.



Beweis. Man setze $OA_1 = \varrho$, also $OA = \varrho^2$, $OB_1 = r$, also $OB = r^2$, den zum Radius $OM = 1$ gehörigen Bogen $\widehat{E_1F_1} = \alpha$, also $\widehat{EF} = 2\alpha$, so daß Bogen $A_1D_1 = \varrho\alpha$, $\widehat{AD} = \varrho^2 2\alpha = 2\varrho^2\alpha$ und demnach

$$\frac{\widehat{AD}}{\widehat{A_1D_1}} = \frac{2\varrho^2\alpha}{\varrho\alpha} = \frac{2\varrho}{1}$$

wird. Ebenso wird

$$\widehat{B_1C_1} = r\alpha, \quad \widehat{BC} = r^2 2\alpha = 2r^2\alpha,$$

folglich

$$\frac{\widehat{BC}}{\widehat{B_1C_1}} = \frac{2r^2\alpha}{r\alpha} = \frac{2r}{1},$$

wofür, wenn die Dimensionen der Rechtecke unendlich klein sind, also für die Grenze $r = \varrho$ zu setzen ist, geschrieben werden kann

$$\frac{\widehat{BC}}{\widehat{B_1C_1}} = \frac{2\varrho}{1}.$$

Für die beiden Bogenpaare ist also das obige Verhältnis als richtig nachgewiesen.

Ferner ist

$$A_1B_1 = r - \varrho, \text{ also } AB = r^2 - \varrho^2 = (r + \varrho)(r - \varrho),$$

demnach

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{r^2 - \varrho^2}{r - \varrho} = \frac{(r + \varrho)(r - \varrho)}{r - \varrho} = \frac{r + \varrho}{1}.$$

Bei unendlicher Kleinheit der Dimensionen strebt dieses Verhältnis der Gröfse $\frac{\varrho + \varrho}{1}$ oder $\frac{2\varrho}{1}$ zu, wie es oben behauptet war.

Weil bei unendlicher Kleinheit alle Rechtecksseiten sich wie $2\varrho : 1$ verhalten, sind die sich entsprechenden kleinen Rechtecke beider Ebenen als ähnlich zu betrachten. Dürfen z. B. die kleinen „Rechtecke" der einen Ebene als „Quadrate" betrachtet werden, so sind auch die der andern als „Quadrate" zu betrachten.

[Nach dem Methodischen Lehrbuch (Teil II, Anhang) erreicht man diese Quadrateinteilung, wenn die Strahlen unter den Winkeln

$$0, \ \pm\frac{2\pi}{n}, \ \pm\frac{4\pi}{n}, \ \pm\frac{6\pi}{n}, \ \pm\frac{8\pi}{n}, \ldots$$

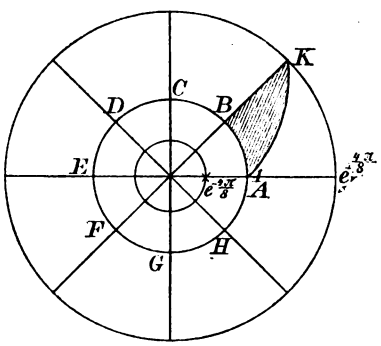
aufeinander folgen, die Längen der Radien aber der geometrischen Reihe

$$e, \ e^{\pm\frac{2\pi}{n}}, \ e^{\pm\frac{4\pi}{n}}, \ e^{\pm\frac{6\pi}{n}}, \ e^{\pm\frac{8\pi}{n}}, \ldots$$

gehorchen.]

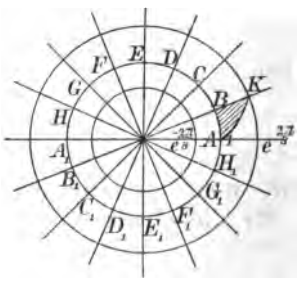
223) In den nebenstehenden Figuren sind die sich gegenseitig entsprechenden Quadratnetze für einfache Winkelteilungen 16 bezw. 8 dargestellt, wobei das doppelte Entsprechen klar hervortritt.

Fig. 164.



Z-Ebene.

Fig. 165.



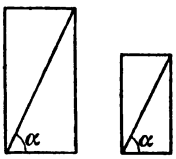
z-Ebene.

Die Diagonalkurven der Quadratnetze sind logarithmische Spiralen, die das Strahlenbüschel und die Kreisschar unter 45° durchsetzen, so

dafs auch die kleinen „Dreiecke“ AKB beider Ebenen einander ähnlich sind.

224) Bei ähnlichen „Rechtecken“ stimmen die Diagonalwinkel ebenfalls überein, und so schliefst man überhaupt, dafs einander entsprechende Winkel (mit Schenkeln von unendlich kleiner Länge) beider Ebenen übereinstimmen, so dafs die Beziehung eine winkeltreue oder isogonale ist, und dafs unendlich kleinen Dreiecken der einen Ebene unendlich kleine und ähnliche der andern entsprechen, kleinen geometrischen Gebilden ähnliche Gebilde der andern entsprechen. Man sagt, beide Ebenen seien in den kleinsten Teilen ähnlich, die Abbildung der einen auf die andere sei eine konforme.

Fig. 166.



Wie man nun ein Gemälde mit Hülfe eines Quadratnetzes vergröfsert oder verkleinert wiedergeben kann, so kann man mit Hülfe der hier besprochenen Quadratnetze zu den Gebilden der einen Ebene mit beliebiger Genauigkeit die entsprechenden der andern Ebene konstruieren.

Das Vergröfserungsverhältnis ist, wie oben gezeigt wurde, für jede Stelle $2\varrho : 1$, wo ϱ den Abstand des kleinen Gebildes der z-Ebene vom Nullpunkte bedeutet. In der Umgebung des Nullpunktes wird es zu $0 : 1$, im unendlichen Bereiche zu $\infty : 1$, so dafs beide Bereiche Ausnahmestellung einnehmen. Im Nullpunkte hört auch die „Ähnlichkeit“ auf, da dort 2γ und γ einander entsprechen.

225) In technischer und mechanischer Hinsicht ist nun Folgendes von Wichtigkeit:

Jedem Flächenelemente f der z-Ebene, welches die Entfernung ϱ vom Nullpunkte hat, entspricht in der Z-Ebene ein solches von der Gröfse $4\varrho^2 f$, jeder Fläche $F = \sum f$ der ersteren entspricht also in der letzteren eine Fläche vom Inhalte $F_1 = \sum 4\varrho^2 f = 4\sum f\varrho^2$. Letzterer Ausdruck ist aber das vierfache polare Trägheitsmoment des Flächenstücks F in Bezug auf den Nullpunkt. Folglich gilt der wichtige Satz:

a) Der Flächeninhalt jedes Gebildes der Z-Ebene ist viermal so grofs, wie das Trägheitsmoment des entsprechenden Gebildes der z-Ebene in Bezug auf den Nullpunkt.

226) Jedem Flächenstück f_1 der Z-Ebene entspricht ein solches von der Gröfse $f = \frac{f_1}{4\varrho^2} = \frac{f_1}{4\varrho_1}$ in der z-Ebene, wo ϱ_1 der Abstand

des ersteren Gebildes vom Nullpunkte ist. Jeder Fläche $F_1 = \sum f_1$ der Z-Ebene entspricht also eine solche von der Gröfse

$$F = \sum \frac{f_1}{4\varrho_1} = \frac{1}{4}\sum \frac{f_1}{\varrho_1}$$

in der z-Ebene. Den Ausdruck $\sum \frac{f_1}{\varrho_1}$ deutet aber die Mechanik als das (Newtonsche) Potential der Fläche $\sum f_1$ in Bezug auf den Nullpunkt. Folglich gilt der Satz:

b) Der Flächeninhalt jedes Gebildes der z-Ebene ist gleich dem vierten Teile des (Newtonschen) Potentials der entsprechenden Fläche der Z-Ebene in Bezug auf den Nullpunkt.

227) Jedem Kurvenelemente s der z-Ebene entspricht in der Z-Ebene ein solches von der Länge $2\varrho s$, der Kurve von der Länge $\sum s$ also eine solche von der Länge $\sum 2\varrho s = 2\sum \varrho s$ in der Z-Ebene. Der Ausdruck $\sum \varrho s$ ist aber das Polarmoment erster Ordnung der Kurve $\sum s$ in Bezug auf den Nullpunkt. Folglich:

c) Die Länge jeder Kurve der Z-Ebene ist gleich dem doppelten Polarmomente erster Ordnung der entsprechenden Kurve der z-Ebene in Bezug auf den Nullpunkt.

228) Ebenso entspricht jedem Kurvenelemente s_1 der Z-Ebene in der z-Ebene ein solches von der Länge $\frac{s_1}{2\varrho} = \frac{s_1}{2\sqrt{\varrho_1}}$, so dafs $\sum s_1$ übergeht in $\frac{1}{2}\sum \frac{s_1}{\sqrt{\varrho_1}}$. Auch dieser Ausdruck hat eine Potentialbedeutung für ein gewisses anderes Anziehungsgesetz (als das Newtonsche), soll aber hier nicht untersucht werden.

Ebenso soll die unter b) genannte Potentialbeziehung erst im nächsten Bande bei den Potentialbetrachtungen zur Sprache kommen.

Aus diesen Beziehungen ergiebt sich eine Fülle der interessantesten Resultate, sobald man weifs, welche Kurven beider Ebenen einander entsprechen, denn es werden sich noch zahlreiche andere Anwendungen für die Wärmetheorie, Elektrizitätslehre, Hydrodynamik, Kartographie und Kinematik anschliefsen.

229) **Beispiel zu a.** Der Halbkreisfläche mit Radius r und Mittelpunkt O der z-Ebene entspricht in der Z-Ebene ein ganzer Kreis vom Radius r^2 und vom Inhalte $r^4\pi$, folglich ist der vierte

Teil davon oder $\frac{r^4\pi}{4}$ das Trägheitsmoment des Halbkreises in Bezug auf den Nullpunkt.

Beispiel zu b. Der Kreisfläche mit Radius r_1 und Mittelpunkt O in der Z-Ebene entspricht in der z-Ebene ein Halbkreis vom Radius $\sqrt{r_1}$ und vom Inhalte $\frac{1}{2}(\sqrt{r_1})^2\pi = \frac{r_1\pi}{2}$. Das Vierfache, also $2r_1\pi$, ist demnach das Potential jener Kreisfläche in Bezug auf den Nullpunkt.

Beispiel zu c. Der Halbkreislinie $r\pi$ der z-Ebene mit O als Mittelpunkt entspricht in der Z-Ebene eine Kreislinie von der Länge $2(r^2)\pi = 2r^2\pi$. Demnach ist die Hälfte davon, oder $r^2\pi$, das Polarmoment erster Ordnung der Halbkreislinie vom Radius r in Bezug auf den Nullpunkt.

Jetzt einige Aufgaben über das gegenseitige Entsprechen von Kurven.

230) **Aufgabe.** In der Z-Ebene sei das von horizontalen und vertikalen Geraden gebildete Quadratnetz gezeichnet. Welches Quadratnetz entspricht diesem in der z-Ebene?

Auflösung. Der Geraden $X = a$ oder $R\cos\Phi = a$ entspricht die Kurve $r^2\cos 2\varphi = a$ oder $r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = a$ oder $x^2 - y^2 = a$, oder

$$\frac{x^2}{(\sqrt{a})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{a})^2} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, die durch die Punkte $\pm\sqrt{a}$ der x-Achse geht.

Der Geraden $Y = b$ oder $R\sin\Phi = b$ entspricht die Kurve $r^2\sin 2\varphi = b$ oder $2r\sin\varphi r\cos\varphi = b$ oder $2xy = b$, wofür man schreiben kann

$$xy = \frac{b}{2}.$$

Dies ist eine gleichseitige Hyperbel mit dem konstanten Asymptotenrechteck $\frac{b}{2}$, deren Asymptoten in die x- und y-Achse fallen.

Sind die Geraden der Z-Ebene der Reihe nach

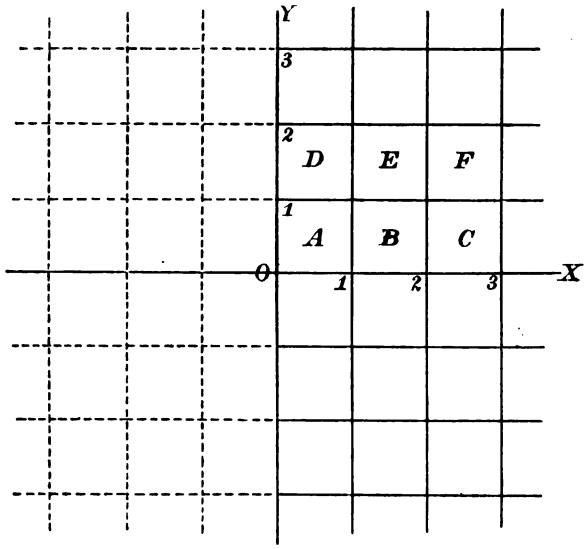
$$X = 0,\ a,\ 2a,\ 3a,\ 4a,\cdots$$
$$Y = 0,\ a,\ 2a,\ 3a,\ 4a,\cdots,$$

so gehen die Hyperbeln auf der X-Achse bezw. der Geraden von der Neigung 45^0 durch Punkte, die von O die Abstände

$$0,\ \sqrt{a},\ \sqrt{2a},\ \sqrt{3a},\ \sqrt{4a},\cdots$$

haben, und es entsteht ein quadratisches Netz.

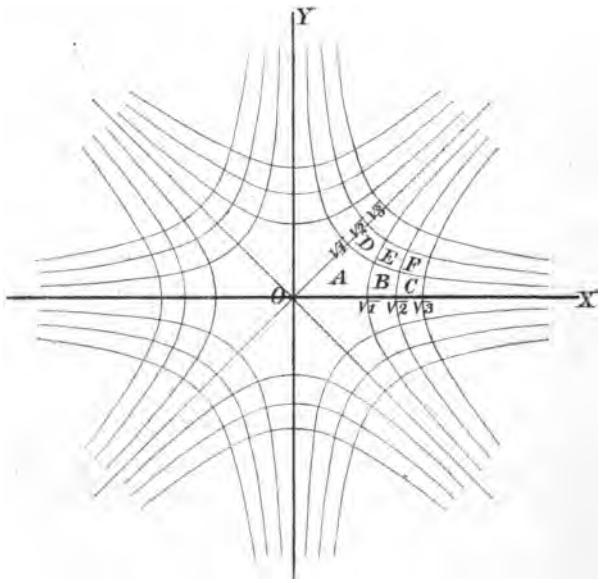
Fig. 167.



Z-Ebene.

231) Für $a = 1$ ist dieses gegenseitige Entsprechen in den Figuren 167 und 168 dargestellt. Dort hat jedes Quadrat den Inhalt 1, folglich:

Fig. 168.



z-Ebene.

Jedes der hyperbolischen Quadrate der Fig. 168 hat in Bezug auf O das polare Trägheitsmoment $T_p = \frac{1}{4}$.

Jede Quadratseite der Z-Ebene hat die Länge 1, folglich:

Jede Seite der hyperbolischen Quadrate hat in Bezug auf den Nullpunkt das Polarmoment erster Ordnung $M_p = \frac{1}{2}$.

232) Aus den Beziehungen $X = x^2 - y^2$ und $Y = 2xy$ folgt ferner der

Satz: Jeder Kurve $f(XY) = 0$ der Z-Ebene entspricht in der z-Ebene eine Kurve $f[(x^2 - y^2), (2xy)] = 0$.

Da aus jenen Beziehungen folgende sich ergeben:

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} + X}{2}}, \quad y = \sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} - X}{2}},$$

so folgt der entsprechende

Satz: Jeder Kurve $f(xy) = 0$ der z-Ebene entspricht in der Z-Ebene eine Kurve

$$f\left[\sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} + X}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} - X}{2}}\right] = 0.$$

233) **Aufgabe.** Was entspricht der Geraden

$$\frac{Y}{X - a} = A = \tan\alpha$$

durch den Punkt a der Z-Ebene?

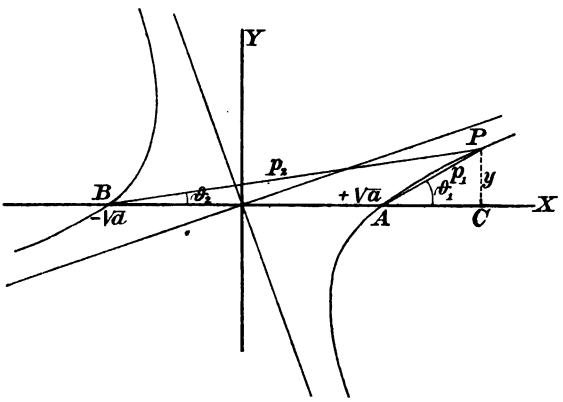
Auflösung. Ihr entspricht die Kurve

$$\frac{2xy}{x^2 - y^2 - a} = A, \quad \text{oder} \quad x^2 - y^2 - \frac{2}{A}xy = a.$$

Setzt man zugleich $-x$ und $-y$ statt x und y ein, so ändert sich nichts, so dafs es sich um die Mittelpunktsgleichung eines Kegelschnitts handelt, der, weil er unendlich ferne Punkte enthält, eine Hyperbel sein mufs. Nun liegen aber die unendlich fernen Punkte der Geraden auch von O aus gesehen in den Richtungen α und $\alpha + 180^0$, folglich die der Hyperbel, von O aus gesehen, in den Richtungen $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\alpha}{2} + 90^0$. Dies sind also die Asymptotenrichtungen, und da sie auf einander senkrecht stehen, handelt es sich wieder um eine gleichseitige Hyperbel.

Folgerung: Jedem schrägen Quadratnetz in der Z-Ebene entspricht ein schräges Quadratnetz gleichseitiger Hyperbeln.

Fig. 169.



Ferner: Die isogonalen Trajektorien jeder solchen Hyperbelschar sind wiederum gleichseitige Hyperbeln.

234) Für jede solche Hyperbel besteht eine wichtige Winkelbeziehung. Verbindet man nämlich einen beliebigen Punkt P der Kurve mit den Schnittpunkten $\pm\sqrt{a}$ auf der X-Achse, so folgt für die Neigungswinkel ϑ_1 und ϑ_2 der Verbindungslinien p_1 und p_2 Folgendes:

$$\tan\vartheta_1 = \frac{CP}{AC} = \frac{y}{x-\sqrt{a}}, \quad \tan\vartheta_2 = \frac{CP}{BC} = \frac{y}{x+\sqrt{a}},$$

folglich

$$\tan(\vartheta_1+\vartheta_2) = \frac{\tan\vartheta_1+\tan\vartheta_2}{1-\tan\vartheta_1\tan\vartheta_2} = \frac{\frac{y}{x-\sqrt{a}}+\frac{y}{x+\sqrt{a}}}{1-\frac{y}{x-\sqrt{a}}\cdot\frac{y}{x+\sqrt{a}}} = \frac{2xy}{x^2-y^2-a}.$$

Nach Obigem ist aber letzteres gleich A oder gleich $\tan\alpha$, es folgt also

$$\tan(\vartheta_1+\vartheta_2) = \tan\alpha,$$

folglich auch

$$\vartheta_1+\vartheta_2 = \alpha.$$

Also, wenn man die Geraden p_1 und p_2 als Radii vectores (nicht mit den gewöhnlichen Brennstrahlen zu verwechseln) bezeichnen will:

Für die gleichseitige Hyperbel ist die Winkelsumme der Radii vectores konstant.

Jetzt kann man sich kurz folgendermafsen ausdrücken:

Der Geraden $\Theta = \gamma$ durch den Punkt a der Z-Ebene entspricht die gleichseitige Hyperbel $\vartheta_1+\vartheta_2 = \gamma$ durch die Punkte $\pm\sqrt{a}$ der z-Ebene.

Dem Strahlenbüschel durch den Punkt a, dessen Neigungswinkel durch $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$ gegeben sind, entspricht ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln durch die Punkte $\pm\sqrt{a}$, deren Winkelsummen $(\vartheta_1+\vartheta_2)$ nach derselben Reihe aufeinander folgen.

235) **Aufgabe.** Was entspricht dem Kreise $R = c$ um den Punkt a der Z-Ebene?

Auflösung. Ihm entspricht, da sich statt $R = c$ auch $(X - a)^2 + Y^2 = c^2$ schreiben läfst, nach Nr. 232 die Kurve

$$(x^2 - y^2 - a)^2 + (2xy)^2 = c^2,$$

deren Gleichung sich folgendermafsen umformen läfst:

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2ax^2 + 2ay^2 + a^2 = c^2,$$
$$(x^2 + y^2 + a)^2 - 4ax^2 = c^2,$$
$$(x^2 + y^2 + a + 2x\sqrt{a})(x^2 + y^2 + a - 2x\sqrt{a}) = c^2.$$

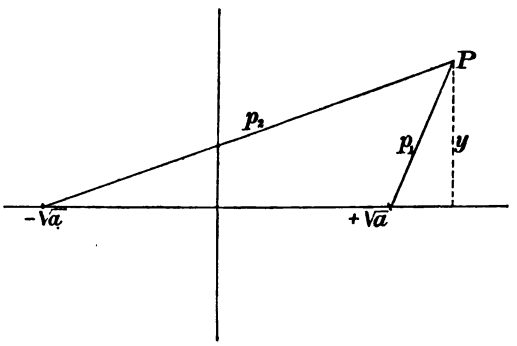
Verbindet man aber wiederum einen Punkt P der Kurve mit den Punkten $\pm\sqrt{a}$, so gilt für die Verbindungslinien

$$p_1^2 = (x - \sqrt{a})^2 + y^2 = x^2 + y^2 + a - 2x\sqrt{a},$$
$$p_2^2 = (x + \sqrt{a})^2 + y^2 = x^2 + y^2 + a + 2x\sqrt{a}.$$

Demnach läfst sich die Kurvengleichung auch schreiben als $p_1^2 p_2^2 = c^2$, oder endlich als

$$p_1 p_2 = c.$$

Fig. 170.



Dies ist die bekannte Gleichung der Lemniskaten zweiter Ordnung oder Cassinischen Kurven, zu denen auch die in Nr. 142 besprochene gleichseitige Lemniskate gehört. Die Punkte $\pm\sqrt{a}$ heifsen ihre Brennpunkte, die Geraden p_1 und p_2 ihre Brennstrahlen. Also:

Jedem Kreise $R = c$ um den Punkt a der Z-Ebene entspricht in der z-Ebene eine Cassinische Kurve $p_1 p_2 = c$ mit den Brennpunkten $\pm\sqrt{a}$.

Folgen die Radien der Kreise der Gröfse nach folgendermafsen aufeinander:

$$e^0,\quad e^{\pm\frac{2\pi}{n}},\quad e^{\pm\frac{4\pi}{n}},\quad e^{\pm\frac{6\pi}{n}},\quad \cdots,$$

so folgen die konstanten Produkte $p_1 p_2$ nach derselben Reihe aufeinander.

236) **Folgerung:** Ist in der Z-Ebene eine Kurve in Polarkoordinaten in Bezug auf den Punkt a durch die Gleichung $f(R, \Theta) = 0$ gegeben, so entspricht ihr in der z-Ebene eine Kurve von der auf $\pm\sqrt{a}$ bezogenen Gleichung

$$f[(p_1 p_2),\ (\vartheta_1 + \vartheta_2)] = 0.$$

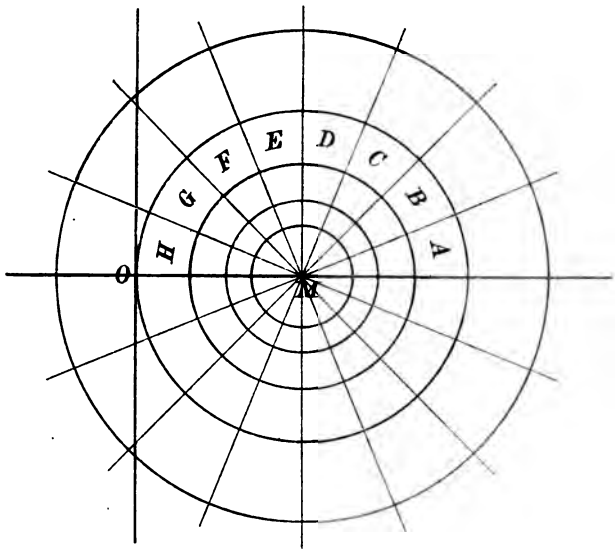
Die Variabelen $(p_1 p_2)$ und $(\vartheta_1 + \vartheta_2)$ sind die zuerst von Lamé aufgestellten lemniskatischen Koordinaten, deren Anwendung für die mathematische Physik von grofser Bedeutung ist und viele Rechnungserleichterungen giebt.

237) **Aufgabe.** Es soll bewiesen werden, dafs alles, was vom Punkte a gesagt ist, auch von jedem beliebigen Punkte mit den Koordinaten a und b gilt.

Die Ausführung ist nur eine Wiederholung der obigen Rechnungen.

238) In Fig. 161 und 162 ist das gegenseitige Entsprechen in Bezug auf den Punkt a dargestellt ($OM = a$). Dem Quadratnetz der Polarkoordinaten entspricht das Quadratnetz der lemniskatischen Koordinaten.

Fig. 171.

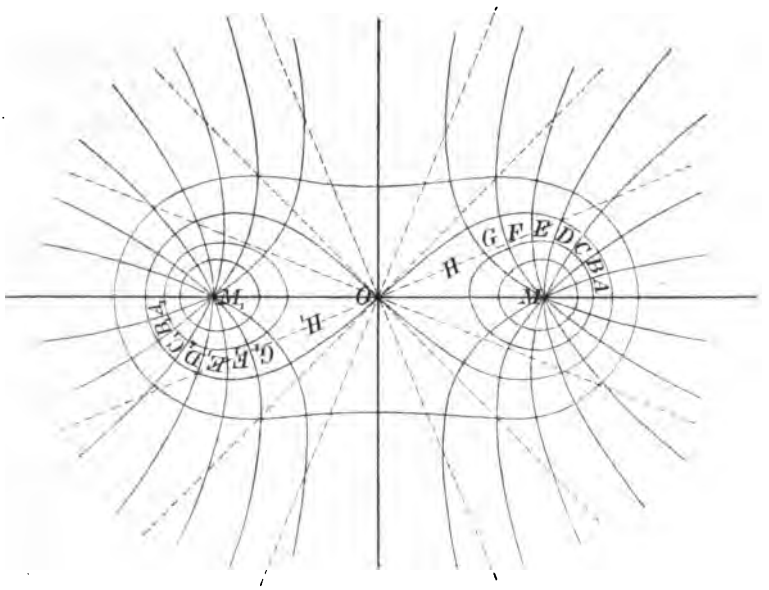


Z-Ebene.

239) **Aufgabe.** Wie grofs ist das polare Trägheitsmoment für die halbe Lemniskate, für jede halbe Cassinische Kurve, für jeden hyperbolischen Sektor einer solchen u. s. w. in Bezug auf den Nullpunkt?

Auflösung. Der gewöhnlichen Lemniskate $p_1 p_2 = c$ mit den Brennpunkten $\pm \sqrt{c}$ entspricht ein Kreis $R = c$ um den Punkt c.

Fig. 172.



Sein Inhalt ist $c^2\pi$, folglich ist $\frac{c^2\pi}{4}$ das gesuchte Trägheitsmoment der halben Lemniskate. Ebenso ist für die zugehörigen konfokalen Cassinischen Kurven $p_1 p_2 = c_1$ das Trägheitsmoment $T_p = \frac{c_1^2\pi}{4}$.

Für jeden der gezeichneten Kreissektoren ist $F = \frac{c_1^2\pi}{16}$, folglich für jeden der hyperbolischen Lemniskatensektoren $T_p = \frac{c_1^2\pi}{64}$. Für jeden Kreisring ist $F = \pi\left(c^2 - c_1^2\right)$, folglich für jeden halben lemniskatischen Ring $T_p = \frac{\pi}{4}\left(c^2 - c_1^2\right)$.

240) **Aufgabe.** Wie grofs ist das Polarmoment erster Ordnung der lemniskatischen und hyperbolischen Kurven in Bezug auf den Nullpunkt?

Auflösung. Der Lemniskate $p_1 p_2 = c$ mit den Brennpunkten $\pm \sqrt{c}$ entspricht ein Kreis vom Umfange $2c\pi$. Das Polarmoment der Halblemniskate ist halb so grofs, also gleich $c\pi$. Für jede konfokale Cassinische Kurve $p_1 p_2 = c_1$ ist jener Kreisumfang gleich

$2c_1\pi$, also das Polarmoment erster Ordnung der Kurve gleich $c_1\pi$. Der Hyperbel von $p_1p_2 = 0$ bis $p_1p_2 = c$ entspricht ein Kreisradius von Länge c. Demnach ist $\frac{c}{2}$ das Polarmoment erster Ordnung des genannten Hyperbelbogens in Bezug auf den Nullpunkt.

241) **Aufgabe.** Welche Kurven entsprechen den logarithmischen Spiralen $R = ck^{\Theta}$ in Bezug auf den Pol a?

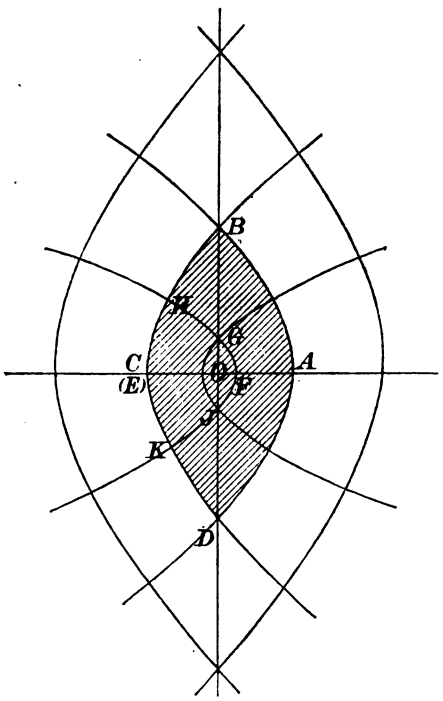
Auflösung. Die isogonalen Trajektorien der konfokalen Lemniskatenschar erhalten die Gleichung

$$p_1p_2 = ck^{\vartheta_1+\vartheta_2}.$$

Sie sind als Diagonalkurven in das Netz ähnlicher „Rechtecke" leicht einzuzeichnen. Den elementar abzuleitenden Eigenschaften der logarithmischen Spiralen entsprechen solche dieser neuen Kurven.

242) **Aufgabe.** Welche Kurven entsprechen den Geraden $x = a$ oder $r\cos\vartheta = a$ und $y = b$ oder $r\sin\vartheta = b$ der z-Ebene?

Fig. 173.



z-Ebene.

Auflösung. Die gesuchten Kurven haben die Gleichungen

$$\sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}+X}{2}} = a,$$

oder $$\sqrt{R}\cos\frac{\Phi}{2} = a,$$

oder $$R\frac{1+\cos\Phi}{2} = a^2$$

und

$$\sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}-X}{2}} = b,$$

oder $$\sqrt{R}\sin\frac{\Phi}{2} = b,$$

oder $$R\frac{1-\cos\Phi}{2} = b^2.$$

Dies sind wiederum Kegelschnittgleichungen, und zwar Brennpunktsgleichungen von Parabeln, wie man erkennt, wenn man bei einer davon durch Koordinatenverschiebung nach a^2 die Scheitelgleichung bildet.

Folgen in der z-Ebene die beiden Schaaren von Geraden in den Abständen

$$0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \pm 4a, \cdots$$

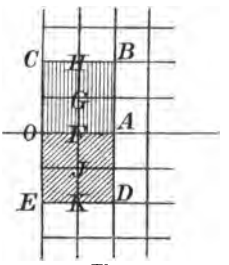
aufeinander, so schneiden die Parabeln der Z-Ebene die X-Achse an den Stellen

$$0, \pm a^2, \pm 4a^2, \pm 9a^2, \pm 16a^2,$$

die Y-Achse an den Stellen

$$0, \pm 2a^2, \pm 8a^2, \pm 18a^2, \pm 32a^2.$$

Fig. 174.



z-Ebene.

243) **Bemerkung.** Die schraffierte parabolische Fläche hat, wenn $OA = 1$ ist, den Inhalt $\frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 4 = \frac{16}{3}$, folglich hat das Rechteck $EDBC$ in Bezug auf O das polare Trägheitsmoment $\frac{4}{3}$. [Probe:

$$\left(\tfrac{1 \cdot 2^3}{12} + \tfrac{2 \cdot 1^3}{12}\right) + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 \cdot 2 = \left(\tfrac{8}{12} + \tfrac{2}{12}\right) + \tfrac{2}{4} = \tfrac{4}{3}.]$$

Allgemein handelt es sich bei der Parabelfläche durch $\pm a^2$ um den Inhalt $\frac{2}{3}(2a^2)(4a^2) = \frac{16}{3}a^2$, also bei dem Rechteck von der Breite a und der Höhe $2a$ um $\frac{4}{3}a^2 = T_p$.

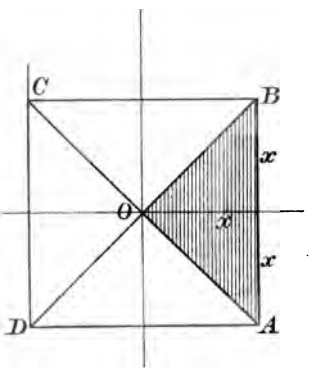
244) Die Parabel hat nach dem Methodischen Lehrbuch, III, Schlufsseite, von B bis D die Länge $\frac{p}{2}[\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2})] = 1{,}1478\,p$. Ist also $OA = a^2$ und $BD = p = 4a^2$, so handelt es sich um die Länge

$$2a^2[\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2}) = 1{,}1478 \cdot 4a^2.$$

Halb so grofs ist das Polarmoment der Geraden von Länge $BD = 2a$ (Fig. 174) im Abstande a von O, also gleich

$$a^2[\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2})]$$
$$= 1{,}1478 \cdot 2a^2 = 2{,}2956\,a^2.$$

Fig. 175.



Denkt man sich jetzt die Länge $2a$ und den Abstand veränderlich als $2x$ bezw. x, so hat man im letzten eine Querschnittsformel

$$q_x = x^2[\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2})]$$

für ein Dreieck OAB in Bezug auf O. (Fig. 175.) Für dieses ganze Dreieck ist also das Polarmoment erster Ordnung nach der Schichtenformel

$$M_p = \frac{x^3}{3}[\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2})] = \frac{1{,}1478 \cdot 2x^3}{3};$$

für das Quadrat $ABCD$ mit Basis $2x$ ist also in Bezug auf O

$$M_p = \frac{4x^3}{3}[\sqrt{2} + \lg(1+\sqrt{2})] = \frac{8x^3}{3} \cdot 1{,}1478 = 3{,}0608\, x^3.$$

Dreht sich das Quadrat in seiner Ebene um O mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ϑ, so ist demnach die mittlere Geschwindigkeit

$$v_m = \frac{M_p}{F}\vartheta = \frac{1}{4x^2} \cdot \frac{4x^3}{3}[\sqrt{2} + \lg(1+\sqrt{2})]\,\vartheta = \frac{2}{3} \cdot 1{,}1478\, x\vartheta = 0{,}7652\, x\vartheta,$$

also ist der Radius der mittleren Geschwindigkeit

$$\varrho_m = 0{,}7652\, x.$$

Dies ist zugleich der mittlere Abstand sämtlicher Punkte der Quadratfläche vom Mittelpunkte.

245) Damit ist zugleich der in Fig. 153 dargestellte Diagrammkörper berechnet. Sein Inhalt ist für $x = \frac{b}{2}$

$$M_p = \frac{4}{3}\frac{b^3}{8}[\sqrt{2} + \lg(1+\sqrt{2})] = \frac{1{,}1478\, b^3}{3} = 0{,}3826\, b^3.$$

Der ganze Rechteckskörper hat den Inhalt $b^2 \cdot b\sqrt{\frac{1}{2}} = b^3\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}7071\, b^3$, der innere, trichterförmige Raum also ist

$$b^3\sqrt{\tfrac{1}{2}} - M_p = 0{,}7071\, b^3 - 0{,}3826\, b^3 = 0{,}3245\, b^3.$$

Der auf der Spitze stehende Kegel hat die Höhe $b\sqrt{\frac{1}{2}}$ und den Radius $b\sqrt{\frac{1}{2}}$, also den Inhalt

$$\frac{b^2\pi}{2}\,\frac{1}{3}\,b\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{b^3\pi}{6}\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}7071\, b^3\,\frac{\pi}{6} = 0{,}3702\, b^3.$$

Von ihm sind vier gleiche hyperbolische Teile abgeschnitten, deren Gesamtinhalt ist

$$\frac{b^3\pi}{6}\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \left(b^3\sqrt{\tfrac{1}{2}} - M_p\right) = b^3\sqrt{\tfrac{1}{2}}\left[\frac{\pi}{6} - 1\right] + M_p = b^3(0{,}3702 - 0{,}3245)$$
$$= 0{,}0457\, b^3,$$

so daſs jeder Abschnitt für sich den Inhalt $0{,}0139\, b^3$ hat.

Damit ist überhaupt gezeigt, wie hyperbolische Abschnitte solcher Art zu berechnen sind.

246) **Aufgabe.** Das Polarmoment erster Ordnung für das Rechteck mit den Seiten $2a$ und $2b$ zu bestimmen.

Den Geraden HB und CB der z-Ebene entsprechen nach Nr. 242 Parabeln von den Gleichungen

$$\sqrt{X^2 + Y^2} + X = 2a^2$$

und

$$\sqrt{X^2 + Y^2} - X = 2b^2,$$

aus denen durch Subtraktion folgt

$$2X = 2a^2 - 2b^2$$

oder

$$X = a^2 - b^2,$$

durch Addition dagegen

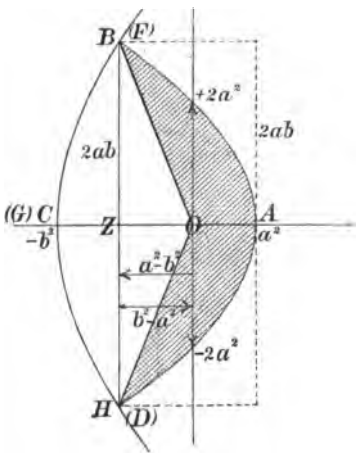
$$2\sqrt{X^2 + Y^2} = 2(a^2 + b^2)$$

oder

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = a^2 + b^2,$$

so dafs

Fig. 176.



Z-Ebene.

$$Y = \sqrt{R^2 - X^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - a^2 - b^2)^2} = \sqrt{4a^2b^2} = \pm 2ab.$$

Nach dem Methodischen Lehrbuch, III, Schlufsseite, ist die Parabellänge $\widehat{AB}$ für gegebenes Y

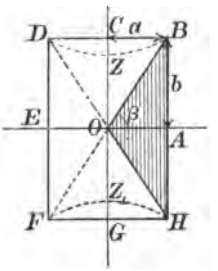
$$\widehat{s} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{Y}{p}\sqrt{p^2 + Y^2} + p\,{}^{e}\lg\frac{Y + \sqrt{p^2 + Y^2}}{p}\right],$$

also für $p = 2a^2$ und $Y = 2ab$ der ganze Bogen

$$\widehat{HB} = \frac{2ab}{2a^2}\sqrt{4a^4 + 4ab^2} + 2a^2\,{}^{e}\lg\frac{2ab + \sqrt{4a^4 + 4a^2b^2}}{2a^2}$$

oder

Fig. 177.



s-Ebene.

$$\widehat{HB} = 2b\sqrt{a^2 + b^2} + 2a^2\,{}^{e}\lg\frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Demnach ist das Polarmoment der Geraden HB halb so grofs, nämlich

$$M_p = b\sqrt{a^2 + b^2} + a^2\,{}^{e}\lg\frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

$$= a^2\left[\frac{b}{a}\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} + {}^{e}\lg\left(\frac{b}{a} + \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}\right)\right]$$

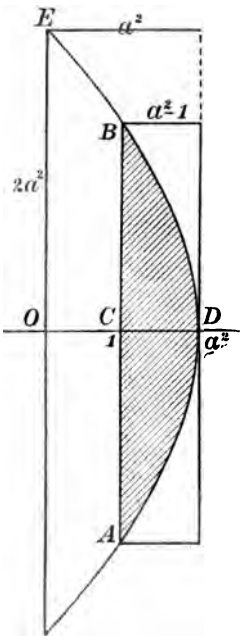
oder

$$M_p = a^2\left[\tan\beta\sqrt{1 + \tan^2\beta} + {}^{e}\lg\left(\tan\beta + \sqrt{1 + \tan^2\beta}\right)\right].$$

Setzt man nun a veränderlich gleich x, so folgt für das Dreieck OBH in Fig. 177 nach der Schichtenformel

$$M_p = \frac{a^3}{3}\left[\tan\beta\sqrt{1+\tan^2\beta} + {}^e\lg\left(\tan\beta+\sqrt{1+\tan^2\beta}\right)\right]$$
$$= \frac{ab}{3}\sqrt{a^2+b^2} + \frac{a^3}{3}\lg\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Fig. 178.



Z-Ebene.

Das Dreieck OBD giebt entsprechend

$$M_p = \frac{ab}{3}\sqrt{a^2+b^2} + \frac{b^3}{3}\lg\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b},$$

also wird für das gesamte Rechteck $HBDF$

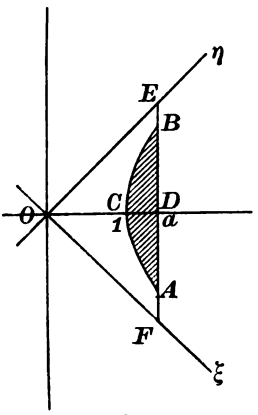
$$M_p = \frac{4ab}{3}\sqrt{a^2+b^2} + \frac{2a^3}{3}\lg\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$
$$+ \frac{2b^3}{3}\lg\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}.$$

Der Radius der mittleren Geschwindigkeit ergiebt sich aus $\frac{M_p}{F} = \frac{M_p}{4ab}$. Auch die betreffenden Kegelabschnitte sind leicht zu berechnen.

247) **Bemerkung.** Die Parabelfläche ABH in Fig. 176 hat, da $ZO = b^2 - a^2$, also $ZA = b^2$ ist, den Inhalt $\frac{2}{3}\,4ab\cdot b^2 = \frac{8}{3}ab^3$. Der vierte Teil davon, $\frac{2}{3}ab^3$, ist das polare Trägheitsmoment der hyperbolisch begrenzten Fläche Z_1HBZ der z-Ebene, für die $OZ = \sqrt{b^2-a^2}$ ist. Die Gleichung der Hyperbel in Fig. 177 ist also

$$y^2 - x^2 = b^2 - a^2.$$

Fig. 179.



z-Ebene.

248) **Aufgabe.** Das polare Trägheitsmoment des Segments der gleichseitigen Hyperbel in Fig. 179 zu berechnen.

Reicht das Hyperbelsegment von 1 bis a, so entspricht ihm in der Z-Ebene (Fig. 178) ein Parabelsegment, von 1 bis a^2 reichend. Aus

$$(a^2-1) : a^2 = Y^2 : 4a^4$$

oder

$$Y : 2a^2 = \sqrt{a^2-1} : a$$

folgt

$$Y = 2a\sqrt{a^2-1},$$

das Parabelsegment wird also

$$F = \frac{2}{3}\cdot 4a\sqrt{a^2-1}\cdot(a^2-1) = \frac{8a\,(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

Demnach ist das polare Trägheitsmoment der Hyperbelfläche

$$T_p = \frac{2a\,(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

In Bezug auf die Gleichheitsachsen ξ und η wird

$$T_\xi = T_\eta = \frac{a}{3}\,(a^2-1)^{\frac{3}{2}}.$$

Da nach Nr. 178 $M_{\xi\eta}$ berechnet werden kann, so läfst sich auch T_x und T_y bestimmen.

249) **Aufgabe.** Was entspricht dem Kreise $r = c$ um den Punkt a der z-Ebene?

Auflösung. Die Gleichung des Kreises läfst sich schreiben als

$$(x-a)^2 + y^2 = c^2 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 - 2ax + a^2 = c^2.$$

Dies geht über in

$$\frac{\sqrt{X^2+Y^2}+X}{2} + \frac{\sqrt{X^2+Y^2}-X}{2} - 2a\sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}+X}{2}} + a^2 = c^2$$

oder in

$$\sqrt{X^2+Y^2} - 2a\sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}+X}{2}} + a^2 = c^2,$$

oder auch

$$R - 2a\sqrt{\frac{R+R\cos\Phi}{2}} + a^2 = c^2$$

oder

1) $$R - 2a\sqrt{R}\cdot\cos\frac{\Phi}{2} + a^2 = c^2.$$

Ist dabei $a = c$, so entsteht die einfachere Gleichung

$$X^2 + Y^2 = 2a^2(\sqrt{X^2+Y^2} + X)$$

oder

$$R^2 = 2a^2(R + R\cos\Phi)$$

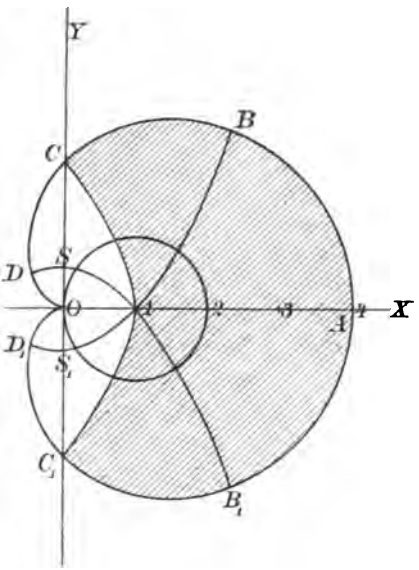
oder

2) $$R = 4a^2\frac{1+\cos\Phi}{2} = 4a^2\cos^2\frac{\Phi}{2}.$$

Dies ist die Gleichung der Cardioide, die allgemeineren Kurven 1) mögen daher als cardioidische Kurven bezeichnet werden. Sie kommen später noch einmal als cyklische Kurven zum Vorschein.

250) **Aufgabe.** Den Inhalt der Cardioide zu berechnen, deren Grundkreis den Radius 1 hat.

Fig. 180.



Auflösung. Der entsprechende Kreis der z-Ebene hat in Bezug auf O das Trägheitsmoment

$$T_p = \tfrac{3}{2} r^4 \pi = \frac{3\pi}{2},$$

folglich ist der Inhalt der Cardioide das Vierfache davon, d. h.

$$F = 6\pi.$$

251) **Aufgabe.** Wie grofs ist die Fläche zwischen dieser Cardioide und der symmetrisch teilenden Parabel?

Auflösung. Der schraffierte Halbkreis hat für O das Trägheitsmoment

$$r^4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{8}{9\pi}\right) + \left(r + \frac{4r}{3\pi}\right)^2 \frac{r^2\pi}{2},$$

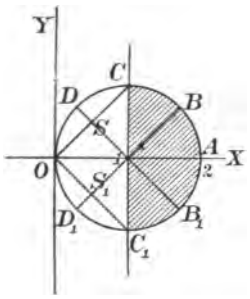
also für $r = 1$

$$T_p = \frac{3\pi}{4} + \tfrac{4}{3},$$

folglich ist die gesuchte Fläche

$$F = 3\pi + \tfrac{16}{3}.$$

Fig. 181.



Der Rest ist

$$6\pi - \left(3\pi + \tfrac{16}{3}\right) = 3\pi - \tfrac{16}{3}.$$

So kann man jeden der entsprechenden parabolischen Sektoren der Cardioide berechnen.

[Setzt man den Umfang der Cardioide, $16r$, also hier 16, als bekannt voraus, so folgt das Polarmoment erster Ordnung der Kreislinie vom Radius $r = 1$ in Bezug auf seinen Randpunkt O als $\frac{16}{2} = 8$; allgemein als $\frac{16\sqrt{r}^2}{2} = 8r$ für den Kreis vom Radius $\sqrt{r}$, also $8\varrho^2$ für den Kreis mit Radius ϱ.]

Weiteres über diese Kurven siehe in des Verfassers „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften“. Noch sei bemerkt, dafs man auch bei Spiralensektoren der Lemniskaten die Trägheitsmomente sofort hinschreiben kann, ebenso die Polarmomente erster Ordnung für die Bogen der lemniskatischen Spiralen, wozu man nur die logarithmischen Spiralen der Kreisschar vergleiche.

252) **Aufgabe.** Symmetrische Brennstrahlsektoren der Parabel zu berechnen.

Das polare Trägheitsmoment des Dreiecks in Bezug auf O ist

$$\frac{ba}{48}(12a^2+b^2)=\frac{a\cdot 2a\tan\frac{\alpha}{2}}{48}\left[12a^2+4a^2\tan^2\frac{\alpha}{2}\right]=\frac{a^4\tan\frac{\alpha}{2}}{6}\left[3+\tan^2\frac{\alpha}{2}\right].$$

Folglich ist die entsprechende Fläche der Parabel das Vierfache, nämlich

$$\frac{2}{3}a^4\tan\frac{\alpha}{2}\left[3+\tan^2\frac{\alpha}{2}\right].$$

(Probe: für $\alpha=90^0$ entsteht $\frac{8}{3}a^4$, d. h. $\frac{2}{3}$ des Rechtecks $ABCD$, wo $OA=a^2$, $OD=2a^2$ ist.)

Fig. 182.

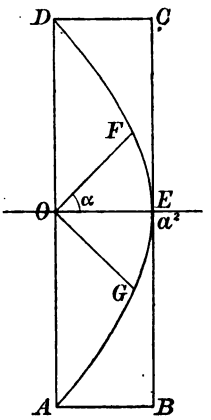
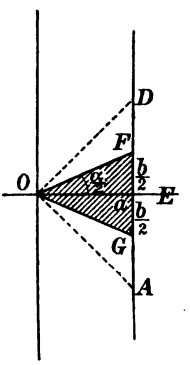
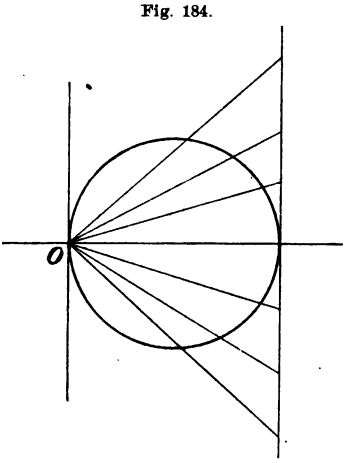


Fig. 183.



253) **Bemerkung.** Vergleicht man die Gleichungen der Lemniskate und der gleichseitigen Hyperbel in Polarkoordinaten, so erkennt man, dafs die Lemniskate die reciproke Kurve der gleichseitigen Hyperbel ist. Die Transformation der Figur 184, in der Kreis und Gerade AB von O aus gerechnet reciprok sind, mittels der Funktion $Z=\sqrt{z}$, giebt den Beweis dafür, denn dabei verwandeln sich Kreis und Tangente in Lemniskate bezw. Hyperbel.

Fig. 184.



Transformiert man dieselbe Figur mittels $Z=z^2$, so gehen Kreis und Tangente in Cardioide und Parabel über, und so folgt, dafs die Cardioide reciproke Kurve der Parabel in Bezug auf den Brennpunkt ist.

Weil das Inversionsbild eines Kreises stets ein Kreis ist, so ist das Inversionsbild jeder Cassinischen Linie vom Mittelpunkt aus stets eine Cassinische Linie, das einer cardioidischen Kurve in Bezug auf O stets eine cardioidische Kurve. Dem Sonderfalle der Geraden entsprechen die Sonderfälle der gleichseitigen Hyperbel und der Parabel.

Transformiert man das System der confokalen Lemniskaten und der orthogonalen Schar gleichseitiger Hyperbeln noch einmal mittels der Funktion $Z = \sqrt{z}$, so entstehen Lemniskaten 4ter Ordnung von der Gleichung $p_1 p_2 p_3 p_4 = c$ und Hyperbeln 4ter Ordnung von der Gleichung $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 = \gamma$, die ebenfalls für die Festigkeitslehre von Bedeutung sind.

254) Als Gesamtresultat des Obigen kann man für die Theorie der Polarmomente 1ter und 2ter Ordnung Folgendes hinstellen:

a) Kennt man den Inhalt einer Fläche, zu deren Begrenzung Gerade, Kreise, Parabeln, cardioidische Kurven, gleichseitige Hyperbeln, Lemniskaten 2ter Ordnung im Sinne der obigen Darlegungen gehören, so kennt man für die durch $z = \sqrt{Z}$ entstehende Fläche, die bezüglich von gleichseitigen Hyperbeln, Lemniskaten 2ter Ordnung, Geraden, Kreisen, Hyperbeln 4ter Ordnung, Lemniskaten 4ter Ordnung begrenzt ist, das polare Trägheitsmoment in Bezug auf den Nullpunkt.

b) Kennt man umgekehrt das Trägheitsmoment der letzteren Fläche in Bezug auf den Nullpunkt, so kennt man auch den Inhalt der ersteren Fläche.

c) Kennt man die Peripherie der ersten Fläche, so kennt man das Polarmoment 1ter Ordnung für die Peripherie der zweiten Fläche.

d) Kennt man umgekehrt das Polarmoment 1ter Ordnung für die Peripherie der letzteren, so kennt man die Peripherie der ersteren Fläche.

[255) Physikalische Bemerkungen zu den behandelten Kurvensystemen.

Um für die besprochenen Kurvenscharen zu interessieren, mögen einige physikalische Bemerkungen über dieselben eingeschaltet werden.*)

a) Fig. 168. Strömt längs der Koordinatenachsen Elektrizität konstanter Spannung in die leitende Platte ein, die unbegrenzt zu denken ist, und wird die Elektrizität in unendlich grofser Entfernung auf den Winkelhalbierenden abgeleitet, so ist die eine Hyperbelgruppe die der Strömungslinien der Elektrizität, die andere Gruppe ist die der Linien gleicher Spannung, sobald der stationäre Zustand eingetreten ist.

*) Die Bemerkungen in den eingeklammerten Abschnitten sind nur für vorgeschrittene Leser bestimmt. Sie mögen als eine Hindeutung darauf, dafs es noch höhere Gebiete giebt, aufgefafst werden. Dort kommt die höhere Analysis zur Geltung, die im Anfange des Studiums noch entbehrt werden kann.

An Stelle der stationären Elektrizitätsströmung kann man eine stationäre Wärmeströmung setzen. Die Stromlinien behalten dann ihre Bedeutung und die Spannungscurven werden Isothermen. Solche Kurvensysteme bezeichnet man daher als isothermische Kurvensysteme.

Erkennt man die Forchheimersche Theorie der Grundwasserstände für gleichmäfsig durchlässiges Erdreich als richtig an, so gilt von der Figur 168 Folgendes: Man denke sich die Koordinatenachsen als sehr weitgehende Sickerschlitze, die energisch ausgepumpt werden, dann geben die einen Hyperbeln die Strömung des Grundwassers an, die andern die Niveaukurven des Grundwasserstandes. Durch die einzelnen „Quadrate" fliefsen dabei stets gleich grofse Flüssigkeitsmengen, sobald nur das Niveau in den Schlitzen als überall gleichmäfsig betrachtet werden darf. Man vergleiche auch die Theorie des Helmholtzschen Geschwindigkeits-Potentials.

b) Fig. 172. Man denke sich die Brennpunkte der konfokalen Lemniskaten als Einströmungsstellen konstant gespannter Elektrizität in die ebene Platte und den unendlich fernen Bereich derselben als Ausströmungsstelle, dann ist das Büschel der Hyperbeln das System der Stromlinien, während die Lemniskaten zweiter Ordnung die Linien konstanter Spannung sind. Bezüglich der Wärmeströmung und der Grundwasserbewegung findet Analoges statt, wie vorher. Übrigens lassen sich die Stromlinien und Spannungskurven bei geeignetem Arrangement mit einander vertauschen. MM_1 und das Lot in O sind dabei als Einströmungslinien, die beiderseitigen Fortsetzungen nach aufsen als Ausströmungslinien zu betrachten.

Hat man ein Gefäfs, dessen Gestalt die äufsere Lemniskate der Figur 172 ist und denkt man sich den Boden an den Brennpunkten durchbohrt, so hat man ein angenähertes Bild von dem Gange der Stromlinien und Niveaukurven unter Voraussetzung niedrigen Wasserstandes und Konstanthaltung desselben am Rande des Gefäfses.

Denkt man sich eine elastische Platte von der Form der äufseren Lemniskate der Figur 172, die längs des Randes horizontal aufliegt und in den Brennpunkten gleich stark belastet wird, so hat man unter gewissen theoretischen Voraussetzungen ein angenähertes Bild von Biegung der Platte, und zwar kann man mehrere Theorien aufstellen. Nach der einen würden die Lemniskaten Niveaulinien sein, die Hyperbeln Linien stärksten Gefälles. Nach einer andern würden die Lemniskaten Linien für konstante Werte einer Funktion der gröfsten Biegungsspannung sein, woraus sich Entsprechendes über die Krümmungsradien aussagen lassen würde. Damit soll über die Richtigkeit solcher Theorien nichts behauptet werden. Es steht zu

vermuten, dafs eine Reihe von Physikern ihre Theorien der Lehre von der konformen Abbildung geradezu anbequemt haben, so dafs an Stelle ihrer Hypothesen eine einzige gesetzt werden könnte, welche die Erhaltung der Konformität und der unendlich kleinen Quadrate bedeutet. Dies dürfte z. B. bei der Forchheimerschen Theorie der Grundwasserstände der Fall gewesen sein, ebenso bei der Theorie freier Ausflufsstrahlen von Helmholtz und Kirchhoff.

Zu Fig. 180 läfst sich bezüglich der Parabeln und cardioidischen Kurven Entsprechendes aussagen, nur tritt für die aufserhalb der Cardioide liegenden Isothermen die Unbequemlichkeit ein, dafs man sich die Ebenen doppelt bedeckt denken mufs.

Auf kartographische und andere Deutungen soll hier nicht eingegangen werden, auch nicht auf den schwierigen Fall der Torsionsprobleme nach St. Venants Theorie, auch nicht auf gewisse Probleme der Kapillarität.]

[256) Die reiche Anwendbarkeit der Transformationen $Z = z^2$ und $z = \sqrt{Z}$ auf die Lehre von den Polarmomenten 1ter und 2ter Ordnung, von der Flächen- und Bogenberechnung, von der Elastizität, von den stationären Strömungen der Elektrizität, der Wärme, des Grundwassers und der Flüssigkeiten überhaupt, auf stereometrische Berechnungen u. dgl. sollten die Ingenieure veranlassen, sich in höherem Grade mit der Lehre von den konformen Abbildungen zu beschäftigen.

Es wird gestattet sein, aufserhalb des Zusammenhanges auf einige besonders wichtige Anwendungen der Abbildungslehre hinzudeuten.

Die Abbildungen

$$Z = \frac{1}{z}, \quad Z = \frac{a + bz}{d + ez} \quad \left(\text{z. B. } Z = \frac{a - z}{a + z}\right)$$

sind identisch mit der Kreisverwandtschaft von Möbius. An den entsprechenden Kreisbüscheln und Kreisscharen hat Kirchhoff zuerst die Theorie der stationären Elektrizitätsströmung erörtert, Thomson zuerst die Theorie der elektrischen Bilder erläutert. An die Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ lassen sich gewisse Gravitationsprobleme anschliefsen.

Die Abbildung

$$Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

führt auf die wichtigen elliptischen Koordinaten (Fig. 207) und wurde zuerst von Prof. E. Heine physikalisch verwertet. Die erste Einführung der letzteren verdankt man Jacobi.

Durch die Abbildung $Z = z^n$ bezw. $z = \sqrt[n]{Z}$ lernt man die Lemniskaten und Hyperbeln n^{ter} Ordnung kennen, die ebenfalls in physikalischer Hinsicht von Wichtigkeit sind.

Die Abbildungen

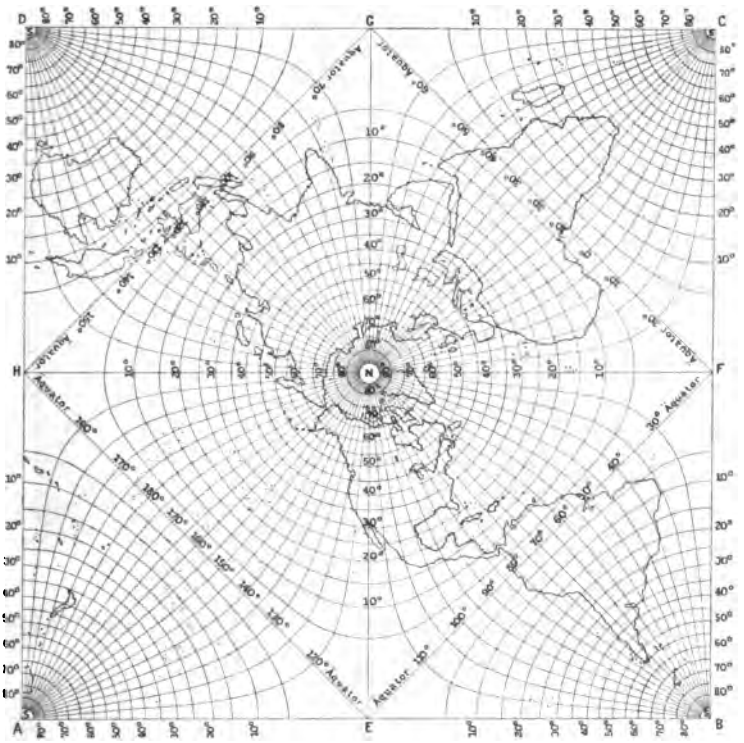
$$Z = \sqrt{1 - z^2}, \quad Z = \sin z, \quad Z = \cos z$$

führen auf die zuerst von Lamé behandelten lemniskatischen Koordinaten, die oben eingehender besprochen wurden.

Die Abbildungen $Z = \lg z$ und $z = e^Z$ geben den Zusammenhang der Mercatorkarte mit der Polarkarte von Hipparch und Ptolemäus, erleichtern die Theorie der logarithmischen Spiralen und lassen im Anschluſs an Burmesters Untersuchungen kinematische Deutungen zu. Auch Gravitations- und Potentialprobleme lassen sich anschlieſsen.

Ganz neue Bereiche des mathematischen Denkens werden durch die Abbildung mittels der elliptischen Funktionen $Z = \sin \operatorname{am} z$, $Z = \cos \operatorname{am} z$ und $Z = \Delta \operatorname{am} z$ eröffnet, durch deren doppeltperiodischen Charakter die Möglichkeit eröffnet wird, die ganze Ebene auf ein Rechteck konform zu übertragen.

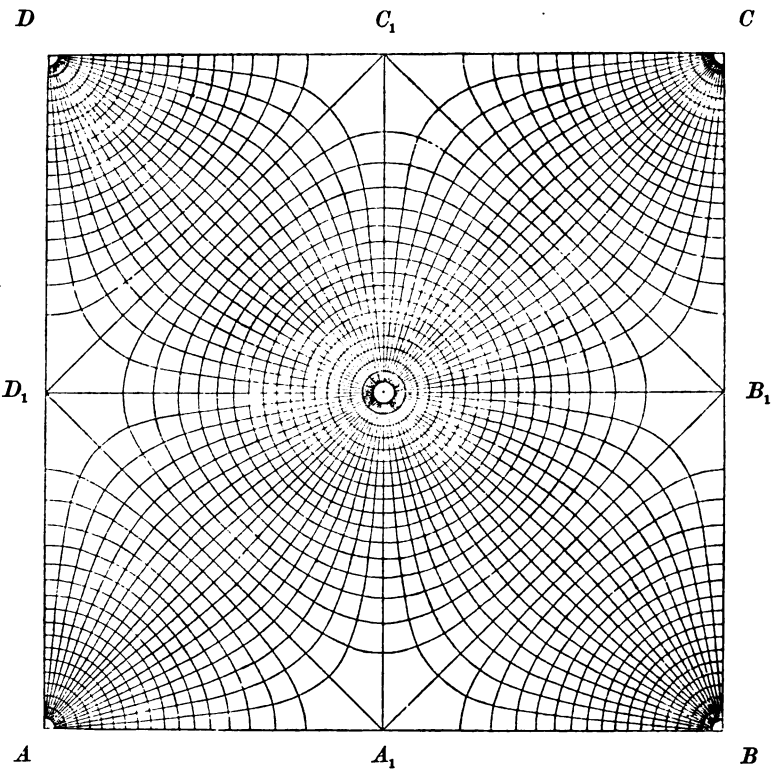
Fig. 185.



So ist z. B. im Anschluſs an Jacobi, Schering und Schwarz durch Peirce gezeigt worden, wie man im Stande ist, die Kugelober-

fläche mit dem Netz der Meridiane und Parallelkreise auf der Fläche eines Quadrates darzustellen. Die Unstetigkeitspunkte sind geschickter Weise in den Ocean verlegt worden. Der Äquator erscheint als Quadrat. Die symmetrische Fortsetzung der einzelnen Oktanten läfst zwanglos die doppelte Periodizität erkennen. Aus geographischen Gründen ist in Figur 185 nicht die Einteilung in kleine Quadrate gewählt, sondern die Einteilung in Rechtecke, die, wie auf dem Globus, nur in der Nähe des Äquators quadratisch erscheinen, dagegen nach den Polen hin das Verhältnis der Länge zur Breite gesetzmäfsig zunehmen lassen.*)

Fig. 186.



Die entsprechenden physikalischen Deutungen sind leicht im Anschlufs an die Zeichnung des Gradnetzes zu geben.

Es handelt sich z. B. um Einströmung der Elektrizität oder Wärme in der Mitte, Ausströmung in den Eckpunkten *A, B, C* und *D*.

*) Die Figuren 185 und 186 sind nach einem Cliché angefertigt worden, welches von Herrn Prof. Adr. Guébhard in Paris freundlichst zur Verfügung gestellt wurde.

Denkt man sich das Quadrat $A_1B_1C_1D_1$ aus der Figur herausgeschnitten, so lassen sich Deutungen entsprechender Art ablesen, auch solche über den Zustand einer quadratisch geformten elastischen Platte, die in der Mitte belastet ist, auch über die Kapillarität im Innern eines engen Röhrchens von quadratischem Querschnitt, oder über die Wasserstandslinien in dem Terrain einer quadratisch geformten Insel, in deren Mitte sich ein Pumpwerk befindet. Nur ist zu beachten, dafs die Annahme der Hypothesen, die dem Charakter der Konformität mit den einfacheren Koordinatensystemen entsprechen, an der Hand des Experimentes auf ihre Zulässigkeit zu prüfen ist.

Ohne Kenntnis des konformen Zusammenhanges ist ein Eindringen in die feineren Theorien undenkbar. Dieser spielt schon jetzt in einigen Lehrbüchern der Mechanik eine hervorragende Rolle, und Kirchhoff und Helmholtz haben mit dem Hülfsmittel der konformen Abbildung sogar die schwierige Theorie der freien Ausflufsstrahlen angebahnt. Deshalb sei an dieser Stelle auf die „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildungen“ hingewiesen, zu deren Studium gröfsere Kenntnisse aus der höheren Analysis nur für den Schlufsteil nötig sind, während der Anfang ganz elementar gehalten ist. Die oben genannten Abbildungen und zahlreiche andere sind dort eingehend behandelt und die angedeuteten physikalischen Beziehungen erläutert.]

Abschnitt VII.

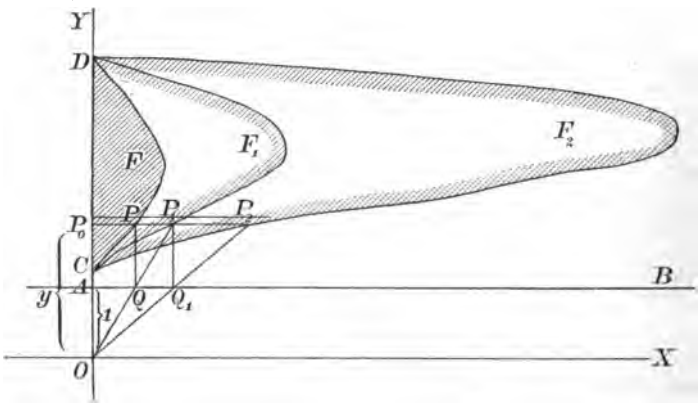
Graphostatische Methoden zur Bestimmung von Trägheits- und Centrifugal-Momenten.

A. Graphische Methode von Nehls zur Bestimmung des statischen Momentes und des Trägheitsmomentes einer Fläche.

257) Der schraffierte Teil der Figur sei die gegebene Fläche F. Um das statische Moment M_x und das Trägheitsmoment M_y zu bestimmen, verfahre man folgendermafsen:

P_0P sei der Horizontalschnitt f in der beliebigen Höhe y, AB die Parallele zur X-Achse in der Höhe $OA = 1$. Man ziehe

Fig. 187.



die Senkrechte PQ und OQ bis zum Schnitte P_1 mit dem Horizontalschnitte. Dann ist $AQ = f$, folglich $P_0P_1 = f \cdot y$, d. h. P_0P_1 ist das statische Moment von f in Bezug auf die X-Achse. Für sämmtliche Schnitte mache man dasselbe, dann bilden alle Punkte P_1 eine über CD stehende Fläche F_1 und diese Fläche stellt das

statische Moment M_x der Fläche F in Bezug auf die X-Achse dar.

Wiederholt man dasselbe mit der Fläche F_1, so entsteht durch die neue Konstruktion eine Fläche F_2 über CD. Diese stellt das statische Moment zu F_1 und zugleich das Trägheitsmoment T_x für F dar, denn es ist $AQ_1 = fy$, folglich $P_0P_2 = fy^2$, folglich

$$F_1 = \sum fy^2 = T_x.$$

258) **Bemerkung.** Wählt man $OA = b$, so wird $bF_1 = M_x$ und $b^2F_2 = T_x$, wie leichte Rechnungen zeigen. Dabei kommt die dritte bezw. vierte Dimension von M_x bezw. T_x zum Vorschein.

Ist die Fläche anders gestaltet, so lassen sich die Querschnitte nach Cavalieri an die Gerade CD verschieben, wodurch nichts geändert wird. Man kann aber auch die wie in Figur 188 durch OY getrennten Teile gesondert behandeln und dann addieren bezw. die Resultate für $ABCDE$ und $ABFDE$ in Figur 189 durch Subtraktion mit einander verbinden.

Fig. 188.

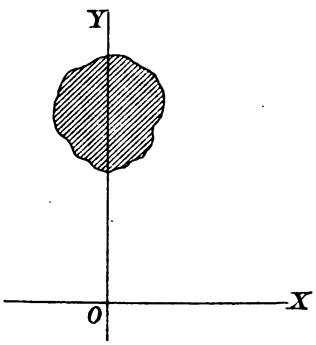
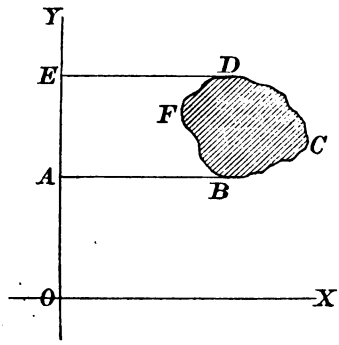


Fig. 189.



Die Methode ist einfach und brauchbar, wenn man die Flächen mit Hülfe des Polarplanimeters zu bestimmen versteht.

B. Graphische Methode von Mohr mit Hülfe des Kräfteplans und Kräftepolygons.

259) Man bestimme, wie in Nr. 18 mit Hülfe des Kräfteplans das Kräftepolygon und die Schwerpunktsachse A_1S, nur wähle man P als den symmetrisch teilenden Punkt des Halbkreises über

$$AK = f = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n.$$

Im Kräftepolygon ist $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABP$, so dafs sich die Inhalte wie die Quadrate der Höhen über A_1B_1 bezw. AB verhalten, die gleich x_1 bezw. $\frac{1}{2}f$ sind. Also:

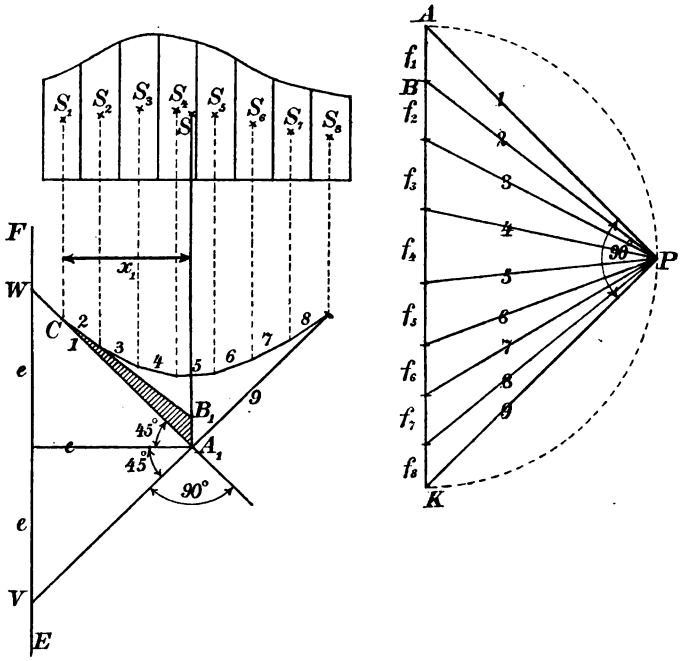
$$\triangle A_1B_1C : \tfrac{1}{2}f_1 \cdot \frac{f}{2} = x_1^2 : \left(\frac{f}{2}\right)^2,$$

folglich

$$f_1x_1^2 = \triangle A_1B_1C \cdot f.$$

Bei unendlich schmalen Streifen ist aber $f_1x_1^2$ das Trägheitsmoment des ersten Streifens in Bezug auf die Schwerpunktsachse A_1S.

Fig. 190.



Ebenso ist es mit den andern Streifen, d. h. es ist das Trägheitsmoment der Fläche f

$$T_s = \sum f_n x_n^2 = F \cdot f,$$

wo F die Fläche des Kräftepolygons ist, also gleich dem Produkte aus der gegebenen Fläche und der Fläche des Kräftepolygons.

Bemerkung. Verschiebt man die Schwerpunktsachse um e (parallel zu sich selbst), so wird nach Nr. 27

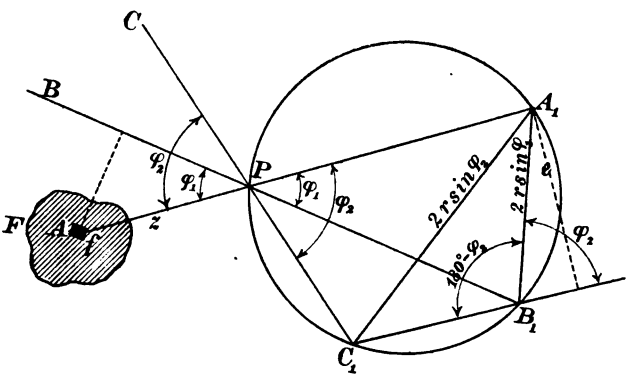
$$T = T_s + e^2 f = Ff + e^2 f = f(F + e^2),$$

d. h. zum Kräftepolygon ist noch die Fläche $A_1 VW = e^2$ hinzuzufügen.

C. Andere Methode von Mohr, auf Benutzung eines Hülfskreises gestützt.

260) Um das Trägheitsmoment und das Centrifugalmoment einer Fläche F in Bezug auf Achsen zu bestimmen, die durch einen gegebenen Pol P gehen, benutzt Mohr einen durch P gehenden Kreis

Fig. 191.



von sonst beliebiger Lage und von beliebigem Radius r. Von dem bei A liegenden Flächenelemente f aus ist ein Polstrahl AP bis zum Schnittpunkte A_1 mit dem Kreise zu ziehen. Sind PB und PC die Strahlen, in Bezug auf welche die Momente bestimmt werden sollen, und bilden diese mit PA die Winkel φ_1 und φ_2, so sind, wenn $PA = z$ gesetzt wird, die Abstände des Flächenelementes von den Achsen gleich $z \sin \varphi_1$ bezw. $z \sin \varphi_2$. Multipliziert man f mit dem Produkte der Abstände, so erhält man

$$f \cdot z^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2,$$

und dieser Ausdruck wird als das Centrifugalmoment oder Deviationsmoment des Elementes f in Bezug auf die Achsen PB und PC definiert. Dies ist allgemeiner, als die frühere Definition, bei der es sich nur um Achsen handelte, die sich unter 90^0 schneiden.

Man verlängere die beiden Achsen bis zu den Kreispunkten B_1 und C_1, was zu Kreissehnen $A_1B_1 = 2r \sin \varphi_1$, $A_1C_1 = 2r \sin \varphi_2$ und $B_1C_1 = 2r \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ Veranlassung giebt. A_1 hat von der letzteren Sehne einen Abstand $e = 2r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$, wie sich leicht aus der Figur ergiebt.

Jetzt liegt es nahe, in A_1 eine Masse von der Gröfse

$$m = \frac{z^2}{2r} f$$

anzubringen, denn deren statisches Moment in Bezug auf $C_1 B_1$ wird gleich

$$me = \frac{z^2}{2r} f \, 2r \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = z^2 f \sin\varphi_1 \sin\varphi_2,$$

d. h. gleich dem Centrifugalmomente des Flächenelementes in Bezug auf die zu $B_1 C_1$ gehörigen Achsen PB und PC.

261) Ist $\varphi_2 = \varphi + 90^0$, so erhält man das früher definierte Centrifugalmoment M_{xy}. Macht man dagegen $\varphi_1 = \varphi_2$, so dafs die beiden Achsen z. B. in PB zusammenfallen, so geht $C_1 B_1$ in die in B_1 berührende Tangente über, und $me = z^2 f \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$ verwandelt sich in

$$me = f (z \sin\varphi)^2,$$

d. h. in das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse PB.

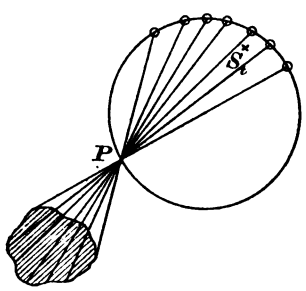
Das hier definierte allgemeine Centrifugalmoment enthält also das früher behandelte und das axiale Trägheitsmoment als spezielle Fälle in sich.

262) Macht man jene Konstruktion für jedes Flächenelement f, so erhält man für die ganze Fläche $\sum f = F$ auf einem Kreisbogen die gesamte Hülfsmasse

$$\sum \frac{f z^2}{2r} = \frac{1}{2r} \sum f z^2 = \frac{T_p}{2r} = \frac{F \varrho_p^2}{2r},$$

wo T_p das polare Trägheitsmoment von F in Bezug auf den Pol P und ϱ_p den zugehörigen Trägheitsradius bedeutet.

Fig. 192.



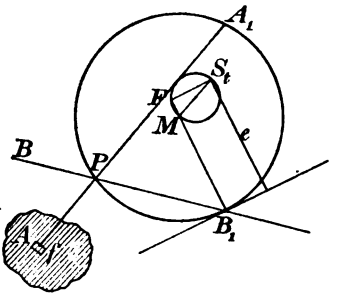
Das statische Moment der gesamten Hülfsmasse in Bezug auf $B_1 C_1$ ist dann gleich dem Centrifugalmoment von F in Bezug auf PB und PC. Diese Hülfsmassen haben einen Schwerpunkt S_t, der als Trägheitsschwerpunkt der Fläche F in Bezug auf den Pol P (und den gewählten Halbkreis) bezeichnet werden soll. In ihm denke man sich die gesamte Hülfsmasse vereinigt.

Fällt man dann von S_t aus ein Lot auf $B_1 C_1$ und multipliziert man dessen Länge mit der Hülfsmasse, so hat man wiederum ein

statisches Moment, welches gleich dem Centrifugal- (bezw. Trägheits-) Moment von F ist.

263) Eine kleine Vereinfachung wird für das Trägheitsmoment noch dadurch erzielt, dafs man S_t mit dem Mittelpunkte M des Hülfskreises verbindet und über $S_t M$ als Durchmesser einen zweiten Hülfskreis zeichnet. Verbindet man dann den Berührungspunkt B_1 der Tangente mit M und verlängert man diese Gerade bis zum zweiten Schnitte F mit dem kleinen Hülfskreise, so ist $B_1 F = e$, und man hat nicht erst nöthig, die Tangenten zu ziehen und ein Lot zu fällen. Ist also S_t bestimmt, so kann man für jede beliebige Tangente sofort den zugehörigen Hebelarm mit Hülfe des Radius finden.

Fig. 193.



264) Kommt es hauptsächlich darauf an, nur solche Achsenpaare zu behandeln, für die das Centrifugalmoment verschwindet, für die also auch das statische Moment der Hülfsachse gleich Null ist — so dafs die Kreissehne $B_1 C_1$ durch S_t gehen mufs —, so braucht man sich vorläufig nicht um das Vorzeichen des Centrifugalmomentes zu bekümmern. [Es ist für f positiv, wenn die von f aus gefällten Lothe auf derselben Seite von z liegen, negativ, wenn z zwischen diesen Loten liegt.]

265) Geht $B_1 C_1$ durch S_t, so bezeichnet man PB und PC als konjugierte Achsen. Zu jedem PB ist die konjugierte Achse PC

Fig. 194.

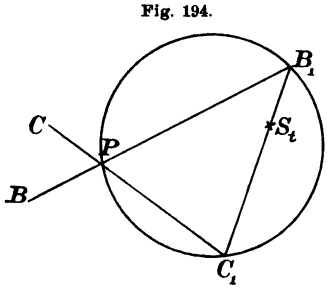
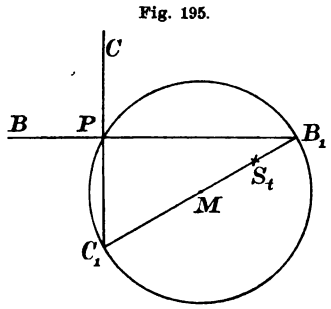


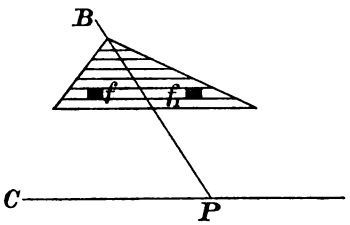
Fig. 195.



leicht zu konstruieren. Geht $B_1 C_1$ sowohl durch S_t, als auch durch M, so hat man den besonderen Fall, dafs die konjugierten Achsen

PB und PC aufeinander senkrecht stehen. Dies ist der früher besprochene Fall der Hauptträgheitsachsen für den Pol P.

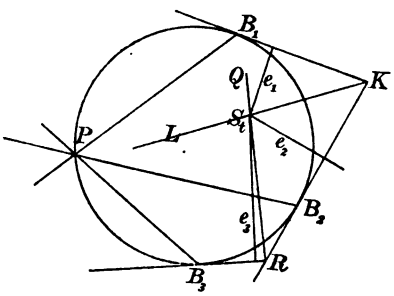
Fig. 196.



266) Den früher behandelten Symmetriefällen entspricht in allgemeinerer Weise Folgendes: Läfst sich die Fläche so in Parallelstreifen einteilen, dafs die Schwerpunkte der Streifen auf einer Geraden liegen, so ist die Richtung der Mittellinie PB konjugiert zur Streifenrichtung PC, PB und PC sind also ein Paar konjugierter Achsen. Das Centrifugalmoment wird nämlich in diesem Falle gleich Null, weil zu jedem Teilchen f ein andres f_1 gehört, dessen Moment das des ersteren aufhebt.

267) Gelingt es, die beiden Koordinaten von S_t zu bestimmen, ebenso das polare Trägheitsmoment T_p und mit dessen Hülfe die dem Punkte S_t beizulegende Hülfsmasse $\frac{F\varrho_p^2}{2r}$, so ist die Angelegenheit im wesentlichen erledigt.

Fig. 197.



Grundsätzlich ist die Aufgabe folgendermafsen zu lösen:

Man bestimmt die Trägheitsmomente auf irgend eine Weise für drei Achsen PB_1, PB_2 und PB_3. Sie mögen sein

$$F\varrho_1^2,\ F\varrho_2^2,\ F\varrho_3^2,$$

so dafs sie sich verhalten, wie $\varrho_1^2 : \varrho_2^2 : \varrho_3^2$. Dann müssen sich e_1, e_2 und e_3 ebenso verhalten, so dafs man zur Bestimmung von S_t hat

$$e_1 : e_2 : e_3 = \varrho_1^2 : \varrho_2^2 : \varrho_3^2.$$

Aus $\frac{e_1}{e_2} = \frac{\varrho_1^2}{\varrho_2^2}$ ergiebt sich die Richtung KL, aus $\frac{e_2}{e_3} = \frac{\varrho_2^2}{\varrho_3^2}$ die Richtung RQ zur Bestimmung der Lage von S_t für den gewählten Hülfskreis.

Dem Punkte S_t ist die Hülfsmasse $\frac{F\varrho_p^2}{2r}$ oder, was dasselbe ist, $\frac{F\varrho_1^2}{e_1} = \frac{F\varrho_2^2}{e_2} = \frac{F\varrho_3^2}{e_3}$ beizulegen.

Ist durch die Form der Fläche ein konjugiertes Achsenpaar als selbstverständlich bekannt, so braucht man nur noch eins der obigen Verhältnisse, z. B. $\frac{e_1}{e_2}$ zu berechnen, denn die Sehne des konjugierten Paares geht bereits durch S_t. Also ist nur noch die Berechnung zweier Trägheitsradien bezw. Trägheitsmomente nötig.

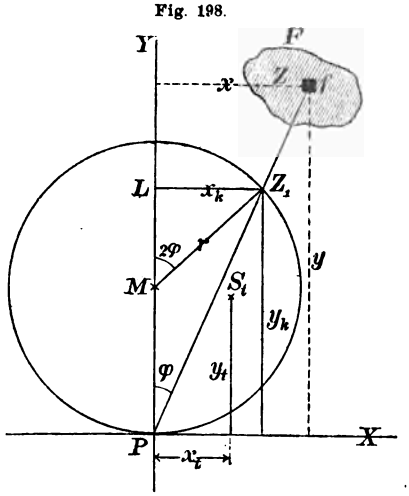
Kennt man dagegen zwei konjugierte Achsenpaare, so schneiden sich die zugehörigen Sehnen in S_t, so dafs es jetzt ausreicht, T_p zu kennen.

268) Die Mohrsche Abhandlung im 33ten Bande des Civil-Ingenieur beschäftigt sich eingehend mit der möglichsten Vereinfachung des Verfahrens, von dem hier nur der Grundgedanke angegeben werden sollte. Dafs die Methode eine allgemeine Lösung der betreffenden Aufgaben der Graphostatik ermöglicht und nach Überwindung der ersten Schwierigkeiten übersichtlicher erscheint, als die Culmannsche Methode, kann zugestanden werden.

D. Modifikation der Mohrschen Methode durch Land.

269) Weil bei Mohr die Berechnung der Koordinaten der Kreispunkte B_1, B_2, B_3 trigonometrische Funktionen nötig macht und auch die Berechnung der von der Lage der Kreispunkte abhängigen statischen Massenmomente unbequem ist, schlägt Land im 34ten Bande des Civil-Ingenieur folgenden Weg ein.

Fig. 198.



Die Tangente des Hülfskreises in P und der zugehörige Radius werden zu Koordinatenachsen gemacht. Das Flächenelement f im Punkte Z habe die Koordinaten x und y und die Entfernung $PZ = z$ vom Pol. Der zu Z gehörige Kreispunkt Z_1 habe die Koordinaten x_k und y_k. Dann ist

$$x_k = r \sin 2\varphi = 2r \sin\varphi \cos\varphi = 2r \frac{x}{z} \frac{y}{z} = 2r \frac{xy}{z^2},$$

$$y_k = PL = r + r\cos 2\varphi = r(1 + \cos 2\varphi) = 2r\cos^2\varphi = 2r \frac{y^2}{z^2}.$$

In Z_1 ist die Masse $m = \frac{fz^2}{2r}$ anzubringen, dann ist in Bezug auf die Y-Achse das statische Moment der Masse m

$$m \cdot x_k = \frac{fz^2}{2r} \cdot 2r \frac{xy}{z^2} = fxy,$$

d. h. gleich dem Centrifugalmoment des Massenteilchens f in Bezug auf beide Achsen. Dagegen ist in Bezug auf die Y-Achse

$$my_k = \frac{fz^2}{2r} 2r \frac{y^2}{z^2} = fy^2,$$

d. h. gleich dem Trägheitsmoment des Teilchens f in Bezug auf die X-Achse.

Ebenso wird $\sum mx_k = \sum fxy$ und $\sum my_k = \sum fy^2$. Die gesamte Hülfsmasse ist aber $\sum \frac{fz^2}{2r} = \frac{1}{2r} T_p = m_t$, also folgt, wenn y_t und x_t die Koordinaten von S_t sind,

$$m_t x_t = \sum fxy = M_{xy},$$

$$m_t y_t = \sum fy^2 = T_x.$$

Die Koordinaten von S_t sind also

$$x_t = \frac{M_{xy}}{m_t} = \frac{M_{xy}}{T_p} 2r$$

$$y_t = \frac{T_x}{m_t} = \frac{T_x}{T_p} 2r.$$

270) Auch Land giebt noch weitere Vereinfachungen an und baut die Theorie in eingehender Weise aus. Hier stehen, wie bei der früheren Behandlungsweise, die gewählten Achsen wieder aufeinander senkrecht, was zwar weniger allgemein ist, aber die Entwickelungen wesentlich erleichtert, ohne die technische Verwendbarkeit einzuschränken.

Mohr selbst äufsert sich über einen Vorzug der von ihm geschaffenen Methode folgendermafsen:

„Man hat die Lehre von den Trägheitsmomenten als das eigentliche Gebiet der graphischen Statik bezeichnet. Diese Behauptung war bis jetzt kaum berechtigt, denn die Trägheitsellipse, mit welcher die Culmannsche graphische Statik operiert, bildet die seit langer Zeit bekannte Darstellung einer auf analytischem Wege abgeleiteten Formel, der ein statischer Sinn nicht untergelegt wird, dasselbe gilt von den früher bekannt gewordenen Darstellungen (Zeitschr. des Hannoverschen Architekten- und Ingenieur-Vereins, Jahrgang 1870, S. 41—63 und

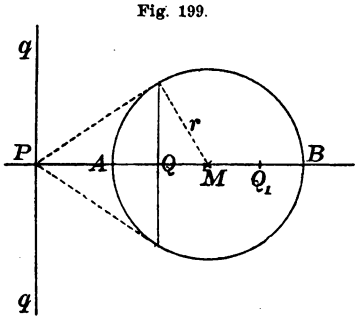
Jahrgang 1877, S. 51—62, ferner die Abhandlung von Lodge, Philosoph. magazine 1886, S. 453—458) der Trägheitsmomente durch Kreise, welche für die praktischen Anwendungen unzweifelhaft bequemer sind, als die Ellipsen. Erst durch die hier entwickelte Darstellung wird die Lehre von den Trägheitsmomenten auf diejenige von den statischen Momenten zurückgeführt und dadurch für das Gebiet der graphischen Statik gewonnen."

Mohr fährt dann damit fort, seine Zahlenrechnungen durch graphische Operationen zu ersetzen, letztere im Anschluſs an die Streckentheorie, wodurch er in der That Vereinfachungen erzielt.

E. Einige Eigenschaften und Anwendungen der Culmannschen Trägheitsellipse.

271) Geometrische Vorbemerkung. In Fig. 199 ist q die Polare von Q, so daſs $PQAB$ harmonische Punkte sind. Nach Pythagoras ist $r^2 = MQ \cdot MP$, also $MQ = \frac{r^2}{MP}$, eine Beziehung, die für $r = 1$ in die reciproke $MQ = \frac{1}{MP}$ übergeht. Macht man $MQ_1 = -MQ = -\frac{r^2}{MP}$, so hat man die entsprechende „negative Abbildung", und wie Q der Pol zu q heiſst, so heiſst Q_1 der Antipol zu q. Ebenso wie q Polare zu Q ist, ist q Antipolare zu Q_1.

Fig. 199.



Hat Q die Koordinaten x_0, y_0, so ist die Gleichung der Polaren q (vgl. Meth. Lehrbuch, II), vorausgesetzt, daſs M Nullpunkt des Koordinatensystems ist,

$$xx_0 + yy_0 = r^2.$$

[Ist letzteres nicht der Fall, sondern hat M die Koordinaten p und q, so ist die Gleichung von q

$$(x - p)(x_0 - p) + (y - q)(y_0 - q) = r^2.]$$

Ist M Nullpunkt, so sind die Koordinaten des Antipols $x_1 = -x_0$ und $y_1 = -y_0$. Die Gleichung von q lautet in diesen Koordinaten

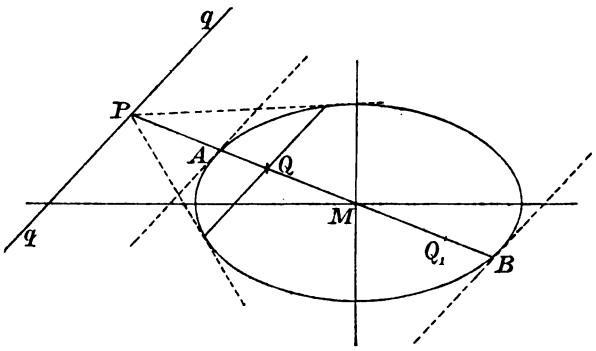
$$xx_1 + yy_1 = -r^2$$

oder

$$xx_1 + yy_1 + r^2 = 0.$$

272) Denkt man sich die Fig. 199 durch Parallelprojektion auf eine beliebige Ebene übertragen, so dafs sich der Kreis in eine Ellipse verwandelt, so bleiben die harmonischen Beziehungen bestehen, ebenso die reciproke Beziehung, die Gerade q aber wird parallel zu den Tangenten in den Endpunkten A und B des Durchmessers, so dafs es sich um konjugierte Richtungen handelt.

Fig. 200.



Demnach sind in Fig. 200 $PQAB$ harmonische Punkte, die Parallele q zu den Tangenten in A und B ist die Polare von Q und zugleich die Antipolare von Q_1. Es ist $MQ \cdot MP = MA^2$, $MQ_1 \cdot MP = -MA^2$. Sind ferner x_0 und y_0 die Koordinaten von Q, so ist die Gleichung von q

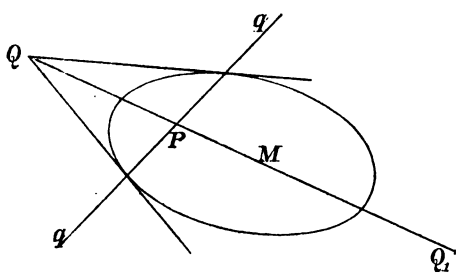
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

wo a und b die Hauptachsen der Ellipse bedeuten. Sind dagegen x_1 und y_1 die Koordinaten von Q_1, so hat die Antipolare q die Gleichung

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + 1 = 0.$$

273) **Aufgabe.** Den Antipol einer Geraden q zu bestimmen, welche die Ellipse nicht schneidet.

Fig. 201.



Auflösung. Man ziehe (Fig. 200) eine beliebige Sehne parallel zu q und verbinde ihren Halbierungspunkt mit M. Dies giebt den konjugierten Durchmesser MP. Von P aus lege man Tangenten an die Ellipse. Die Verbindungslinie der Berührungspunkte giebt den Schnittpunkt Q. Man mache $MQ_1 = MQ$, dann ist Q_1 der Antipol.

Schneidet die Gerade die Ellipse, so ist die Konstruktion noch etwas einfacher. (Fig. 201.)

Es giebt noch zahlreiche andere Lösungen.

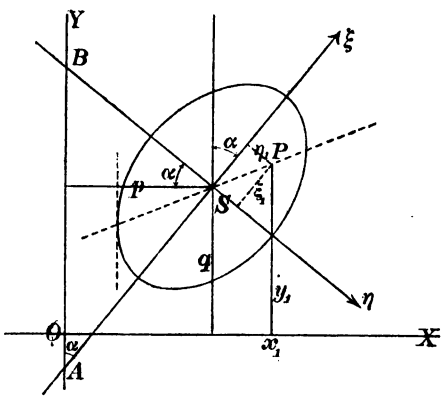
274) **Satz.** Die Koordinaten des Antipols der Ordinatenachse in Bezug auf die Centralellipse einer Fläche F bestimmen sich mittels der Gleichungen

$$x_1 = \frac{T_y}{M_y} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}},$$

$$y_1 = \frac{M_{xy}}{M_y} = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Beweis. In Fig. 202 sei S der Schwerpunkt der Fläche F, seine Koordinaten seien q und p; P sei der nach obiger Methode konstruierte Antipol der Ordinatenachse OY in Bezug auf die Centralellipse. Die Hauptachsen der letzteren bilden ein zweites Koordinatensystem $\xi\eta$. In diesem System habe P die Koordinaten ξ_1 und η_1, im anderen x_1 und y_1. Die Gleichung der Antipolare OY ist dann in ersterem System nach Obigem

Fig. 202.



$$\frac{\xi\xi_1}{a^2} + \frac{\eta\eta_1}{b^2} + 1 = 0.$$

Setzt man $\xi = 0$ und dann $\eta = 0$, so findet man die Abschnitte

$$SA = -\frac{a^2}{\xi_1}, \quad SB = -\frac{b^2}{\eta_1}.$$

Hat α die aus Fig. 202 ersichtliche Bedeutung, so ist mit Hülfe der Schwerpunktskoordinaten

$$SA = -\frac{p}{\sin\alpha}, \quad SB = -\frac{p}{\cos\alpha}.$$

Setzt man dies in die vorigen Gleichungen ein, so folgen die Koordinaten des Antipols P als

$$\xi_1 = \frac{a^2}{p}\sin\alpha, \quad \eta_1 = \frac{b^2}{p}\cos\alpha.$$

Zwischen den Koordinaten x_1, y_1, ξ_1 und η_1 bestehen aber folgende Beziehungen:

$$x_1 = p + \xi_1\sin\alpha + \eta_1\cos\alpha,$$

$$y_1 = q + \xi_1\cos\alpha - \eta_1\sin\alpha.$$

Einsetzung der Werte von ξ_1 und η_1 giebt

$$x_1 = p + \frac{a^2 \sin^2\alpha}{p} + \frac{b^2 \cos^2\alpha}{p},$$

$$y_1 = q + \frac{a^2 \sin\alpha \cos\alpha}{p} - \frac{b^2 \sin\alpha \cos\alpha}{p},$$

oder, wenn man gleichnamig macht und $a^2 - b^2 = e^2$ setzt,

$$x_1 = \frac{p^2 + a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}{p},$$

$$y_1 = \frac{pq + e^2 \sin\alpha \cos\alpha}{p}.$$

Multipliziert man oben und unten mit F, so wird

$$x_1 = \frac{Fp^2 + Fa^2 \sin^2\alpha + Fb^2 \cos\alpha}{Fp},$$

$$y_1 = \frac{Fpq + Fe^2 \sin\alpha \cos\alpha}{Fp}.$$

Nach Abschnitt 133) ist die erste Gleichung nichts anderes, als das eine im Satze Behauptete, denn $Fa^2 \sin^2\alpha + Fb^2 \cos^2\alpha$ bedeutet das Trägheitsmoment für die durch Drehung um α gewonnene Achse, und p^2F ist der Verschiebungsteil, d. h.

$$Fp^2 + Fa^2 \sin^2\alpha + Fb^2 \cos^2\alpha = F\varrho^2$$

ist das Trägheitsmoment der Fläche F in Bezug auf die Ordinatenachse.

275) Ebenso ist in der zweiten Gleichung Fpq der Verschiebungsteil des Centrifugalmomentes, während nach Nr. 140

$$Fe^2 \sin\alpha \cos\alpha = F\frac{e^2}{2} \sin 2\alpha = F\lambda^2$$

das durch Drehung gewonnene Centrifugalmoment ist.

Die Nenner in beiden Gleichungen bedeuten das statische Moment M_y. Es ist also in der That

$$x_1 = \frac{T_y}{M_y}, \quad y_1 = \frac{M_{xy}}{M_y}.$$

Demnach stimmt der Antipol überein mit dem Angriffspunkte der Centrifugalkraft der um die Ordinatenachse gedrehten Fläche F, ebenso mit dem Angriffspunkte des seitlichen Wasserdrucks gegen diese Fläche, vorausgesetzt, dafs die Ordinatenachse Wasserstandslinie ist, mit der Schwerpunktsprojektion des mittels einer durch OY gehenden Ebene abgeschrägten Cylinders, und das Entsprechende gilt von allen andern physikalischen, mechanischen und stereometrischen Problemen, die früher besprochen worden sind.

Graphisch lassen sich also die entsprechenden Punkte mit Hülfe der Culmannschen Centralellipse sehr leicht bestimmen.

---

276) Auch für den Zusammenhang zwischen der Culmannschen Centralellipse und den übrigen Culmannschen Trägheitsellipsen ist der Antipol von grundlegender Bedeutung, wie sich aus den folgenden Betrachtungen ergiebt.

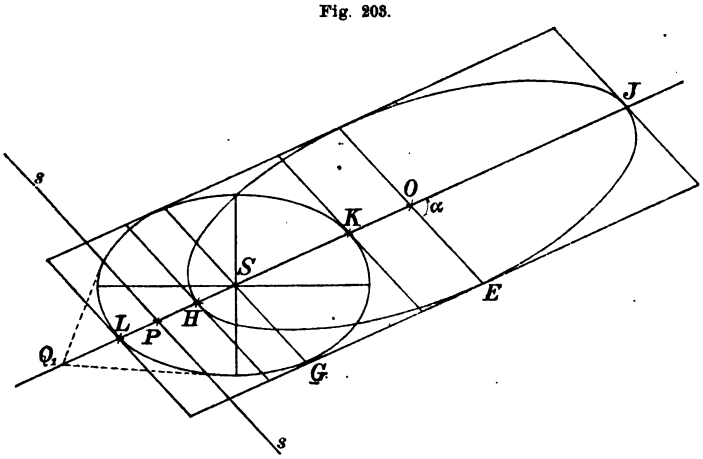
Satz. Die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Culmannschen Trägheitsellipsen sind parallel zu ihrer Centrale.

Beweis. Sind P_1 und P_2 die Mittelpunkte, und ist $F\varrho^2$ das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse P_1P_2, so hat man auf der letzteren in P_1 bezw. P_2 ein Lot ϱ zu errichten und durch seinen Endpunkt eine Parallele zu legen, die sowohl Tangente der einen, als auch der andern Trägheitsellipse wird. Damit ist der Beweis geliefert.

Dafs es sich nur um äufsere Tangenten handeln kann, ergiebt sich aus dem Parallelismus zur Centrale und erhärtet sich gelegentlich des folgenden Satzes.

277) **Satz.** Die Polare des Flächenschwerpunktes in Bezug auf eine beliebige Trägheitsellipse ist zugleich die Antipolare des Mittelpunktes dieser Ellipse in Bezug auf die Centralellipse.

Fig. 203.



Beweis: In Fig. 203 ist die um S gelegte Centralellipse und die um einen beliebigen Punkt O gelegte Trägheitsellipse dargestellt. Die gemeinschaftlichen Tangenten sind nach Nr. 276 parallel zu OS.

Die in den Schnittpunkten L, H, K, J dieser Geraden mit den Ellipsen an die letzteren gelegten Tangenten sind sämtlich parallel (konjugierte Richtung zum Durchmesser OS). Die Gerade s, die Polare des Punktes S in Bezug auf die Ellipse O, ist parallel zu den Tangenten, ebenso die zu OS konjugierten Halbmesser OE und SG. Der von diesen konjugierten Richtungen eingeschlossene spitze Winkel sei α, der senkrechte Abstand der gemeinschaftlichen Tangenten vom Durchmesser OS also $OE \cdot \sin\alpha$, während $OH \cdot \sin\alpha$ der Abstand der in H und J berührenden Tangenten von O ist.

Das Trägheitsmoment der Fläche F für die Achse OE ist, wie sich aus der Erklärung der Culmannschen Ellipse ergiebt,

$$F\varrho^2 = F(OH \cdot \sin\alpha)^2 = T_1,$$

das in Bezug auf die Achse SG genommen ist ebenso

$$T = F(SK \cdot \sin\alpha)^2.$$

Nach dem Verschiebungssatze ist ferner

$$T_1 = T + e^2F,$$

also hier

$$F \cdot (OH \cdot \sin\alpha)^2 = F \cdot (SK \cdot \sin\alpha)^2 + F(OS \cdot \sin\alpha)^2,$$

denn $OS \cdot \sin\alpha$ ist die Verschiebungslänge von SG nach OE. Daraus folgt

$$OH^2 = SK^2 + OS^2.$$

Nach den vorangegangenen Erläuterungen besteht aber die reciproke Beziehung

$$OH^2 = OS \cdot OP,$$

also folgt

$$SK^2 + OS^2 = OS \cdot OP,$$

so dafs

$$SK^2 = OS(OP - OS) = OS \cdot SP$$

ist.

Daraus aber folgt, dafs O der Antipol von s in Bezug auf die Centralellipse ist.

Damit ist der Satz bewiesen. Zugleich ergiebt sich aus

$$OH^2 = SK^2 + OS^2,$$

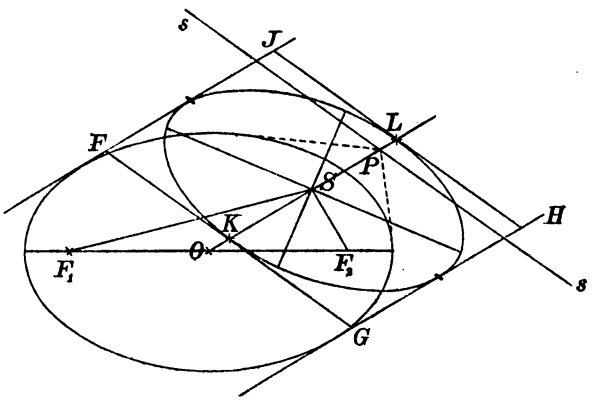
dafs $OH > OS$ ist. Der Schwerpunkt S wird also von jeder Culmannschen Trägheitsellipse umschlossen.

Bemerkung. Kennt man mehrere Trägheitsellipsen und den Schwerpunkt, so kann man auch mehrere (doppelt so viel) Tangenten

der Centralellipse zeichnen. Es mufs demnach eine ganze Reihe von Konstruktionsaufgaben bestehen, z. B.:

278) **Aufgabe.** Die Trägheitsellipse einer Fläche F für einen beliebigen Punkt O sei gegeben, ebenso der Schwerpunkt S der Fläche; die Centralellipse mit ihren Hauptachsen soll konstruiert werden.

Fig. 204.

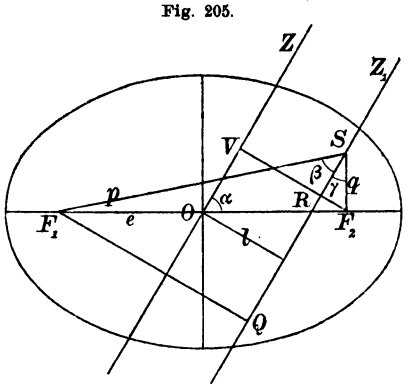


Auflösung. Die in Figur 204 um O gelegte Ellipse sei die gegebene, S, welches nach Obigem innerhalb liegen mufs, sei der gegebene Schwerpunkt. Man ziehe OS und die beiden parallelen Tangenten, konstruiere zu S die Polare s und bestimme $SK = SL$ mittels der Gleichung (vgl. Nr. 277)

$$SK^2 = SO \cdot PS.$$

Legt man durch K und L Parallele zur Polare, so erhält man ein Parallelogramm $FGHJ$. Diesem ist die Hauptellipse (die in den Halbierungspunkten die Seiten berührt) einzubeschreiben, was leicht zu bewerkstelligen ist. (Vgl. Method. Lehrbuch, II.)

Fig. 205.



Es wird nun behauptet, die Hauptachsen würden durch Halbierung des Brennstrahlwinkels F_1SF_2 und seines Nebenwinkels der Lage nach gefunden.

Beweis. Bildet die beliebige Achse OZ mit OF_2 den Winkel α, so ist nach Nr. 133 der Radius des Trägheitsmomentes in Bezug auf diese Achse zu bestimmen aus

$$\varrho^2 = \varrho_2^2 \sin^2\alpha + \varrho_1^2 \cos^2\alpha.$$

Für eine Parallele durch S, die von O um l entfernt sein mag, ist demnach

$$\varrho^2 = \varrho_2^2 \sin^2\alpha + \varrho_1^2 \cos^2\alpha - l^2,$$

oder, da $\varrho_2^2 - \varrho_1^2 = e^2$ ist,

$$\varrho^2 = \varrho_1^2 \sin^2\alpha + e^2 \sin^2\alpha + \varrho_1^2 \cos^2\alpha - l^2$$

oder

$$\varrho^2 = \varrho_1^2 + e^2 \sin^2\alpha - l^2 = \varrho_1^2 + (e\sin\alpha + l)(e\sin\alpha - l).$$

Zieht man nun die Lote F_1Q und F_2RV, so ist

$$F_1Q = e\sin\alpha + l, \quad RF_2 = e\sin\alpha - l,$$

folglich

$$\varrho^2 = b^2 + F_1Q \cdot RF_2.$$

Sind nun β und γ die Winkel, die Z_1Q mit den Brennstrahlen p und q bildet, so ist

$$RF_2 = q\sin\gamma, \quad F_1Q = p\sin\beta,$$

also

$$\varrho^2 = b^2 + pq\sin\beta\sin\gamma$$

oder

$$\varrho^2 = b^2 + \tfrac{1}{2}pq\,[\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)].$$

Hier ist rechts alles konstant, mit Ausnahme der Differenz $(\beta - \gamma)$. Ein Maximum tritt also ein, wenn $\beta - \gamma = 0$, folglich ist die Winkelhalbierende die Achse des Maximalmomentes, das Lot dazu die des Minimalmomentes.

Damit ist die Behauptung bewiesen. Zugleich ist die Gröfse des Maximalradius durch

$$\varrho_{\max}^2 = b^2 - \frac{pq}{2}\cos(\beta+\gamma) = b^2 - \frac{pq}{2}\cos(F_1SF_2)$$

bestimmt. Der Minimalradius ergiebt sich für $\beta - \gamma = 180^0$, also $\cos(\beta - \gamma) = -1$, so dafs man erhält

$$\varrho_{\min}^2 = b^2 - \frac{pq}{2}[1 + \cos(F_1SF_2)].$$

279) **Satz.** Die Achsen der Ebene, in Bezug auf die das Trägheitsmoment einer Fläche konstanten Wert hat, umhüllen eine Schar confokaler Kegelschnitte, deren Brennpunkte die beiden Fixpunkte sind.

Beweis. Nach Nr. 145 war in Bezug auf eine Achse, die von den Fixpunkten die Entfernung p_1 und p_2 hatte, der Trägheitsradius ϱ zu bestimmen aus der Gleichung

$$\varrho^2 = \varrho_1^2 + p_1p_2.$$

Aus Figur 206 folgt ferner

$$SD_1^2 = p^2 + DD_1^2 = p^2 + e^2 \sin^2 \alpha.$$

Aufserdem war schon in Nr. 145 gezeigt, dafs, wenn $SC_1 = e$ gesetzt wird,

$$p_1 p_2 = p^2 - e^2 \cos^2 \alpha,$$

also

$$p^2 = p_1 p_2 + e^2 \cos^2 \alpha.$$

Demnach ist

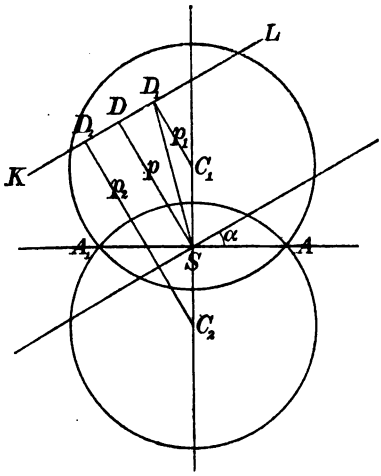
$$SD_1^2 = p_1 p_2 + e^2 \cos^2 \alpha + e^2 \sin^2 \alpha$$

$$= p_1 p_2 + e^2 = p_1 p_2 + \varrho_1^2 - \varrho_2^2,$$

folglich unter Berücksichtigung der ersten Gleichung

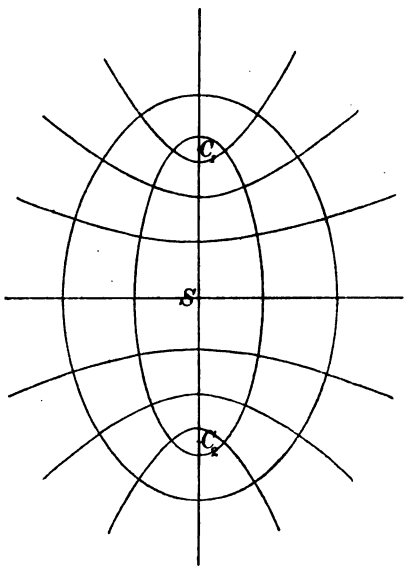
$$SD_1^2 = \varrho^2 - \varrho_2^2 = SD_2^2.$$

Fig. 206.



Ist nun ϱ konstant, so ist auch SD_1 konstant, d. h. KL liegt dann stets so, dafs die von C_1 und C_2 aus darauf gefällten Lote in die Peripherie des mit $SD_1 = \sqrt{\varrho^2 - \varrho_2^2}$ um S geschlagenen Kreises fallen. Dies ist aber eine bekannte Brennpunktseigenschaft der Ellipse und der Hyperbel. Ist $SD_1 > e$, so schneidet KL die Gerade $C_1 C_2$ aufserhalb der Strecke $C_1 C_2$, und es handelt sich um eine Ellipse. Dabei ist $\varrho^2 - \varrho_2^2 > e^2$, d. h. $\varrho^2 - \varrho_2^2 > \varrho_1^2 - \varrho_2^2$, demnach handelt es sich um den Fall $\varrho > \varrho_1$. Ist dagegen $SD_1 < e$, so schneidet die Gerade KL zwischen C_1 und C_2, was auf den Fall der Hyperbel führt. Dabei ist $\varrho < \varrho_1$.

Fig. 207.



Ist endlich $SD_1 = e$, so ist $\varrho = a$, d. h. die Strahlen geben zwei Büschel durch C_1 und C_2, welches gewissermafsen die unendlich flache Ellipse $C_1 C_2$ bezw. die unendlich flache Hyperbel (die von C_1 nach $+\infty$, von C_2 nach $-\infty$ geht) umhüllt.

Fig. 207 stellt die betreffende Doppelschar confokaler Kegel-

schnitte dar. Die eine Schar hat das Gesetz $p + q = c$, die andere das Gesetz $p - q = c_1$.

280) [Dies ist eines der wichtigsten isothermischen Kurvensysteme. Nach Kap. VIII der Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften wird die quadratische Einteilung erreicht, wenn in

$$\frac{p+q}{2} = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) = c$$

die Werte von r der geometrischen Reihe

$$e^0,\ e^{\pm\alpha},\ e^{\pm 2\alpha},\ e^{\pm 3\alpha}, \cdots$$

folgen, während in

$$\frac{p-q}{2} = \cos\vartheta = c_1$$

die ϑ der arithmetischen Reihe

$$0,\ \pm\alpha,\ \pm 2\alpha,\ \pm 3\alpha, \cdots$$

folgen. Das System entsteht mit Hülfe der Abbildung $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ bezw. $z = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$ aus dem System der concentrischen Kreise und Radien der z-Ebene, aber auch mit Hülfe der Abbildung $Z = \cos z$ bezw. $z = \arccos Z$ aus der Doppelschar der Horizontalen und Vertikalen der z-Ebene. Dabei ist zu beachten, dafs $\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{zi} + \frac{1}{e^{zi}}\right)$ ist, was den Zusammenhang der beiden Abbildungsarten aufklärt.

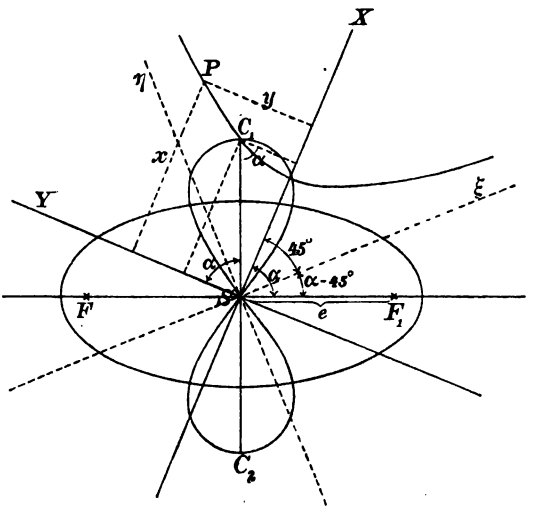
Die so definierten elliptischen Koordinaten geben zu zahlreichen geometrischen und physikalischen Betrachtungen Anlafs. Interessant ist, dafs bei der Abbildung $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ dem Kreisbüschel durch die Fixpunkte ± 1 in der einen Ebene wiederum ein solches in der andern entspricht, nur dafs der Schnittwinkel zweier Individuen in der einen jedesmal doppelt so grofs ist, wie in der andern. Ein Teil der aus diesen Dingen hervorgehenden Folgerungen ist in Kapitel VIII der „Einführung“ behandelt.]

281) **Satz.** Der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, für welche die Hauptträgheitsachsen parallel sind, ist eine durch die Fixpunkte gehende gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt der Schwerpunkt ist und deren Asymptoten den beiden gegebenen Richtungen parallel sind.

Beweis. Die Figur stelle die um S gelegte Centralellipse dar. Die Achsen ξ und η sollen die gegebene konstante Richtung der zu untersuchenden Hauptachsen darstellen. Die Winkelhalbierenden X

und Y geben also die Richtungen der Gleichheitsachsen an, die ebenfalls für alle zu untersuchenden Punkte konstant sind. Diese letzteren mögen mit der Hauptachse der Centralellipse den Winkel α einschliefsen.

Fig. 208.



Ist nun P ein Punkt des zu untersuchenden Ortes, so ist nach dem Verschiebungssatze und dem Drehungssatze in Bezug auf die beiden Koordinaten x und y für das Trägheitsmoment (vgl. Nr. 133)

$$\varrho_x^2 = \varrho_2^2 \sin^2\alpha + \varrho_1^2 \cos^2\alpha + y^2,$$

$$\varrho_y^2 = \varrho_2^2 \cos^2\alpha + \varrho_1^2 \sin^2\alpha + x^2.$$

Da aber X und Y die Gleichheitsachsen sind, so sind die linken Seiten, folglich auch die rechten Seiten gleich. Es folgt also

$$y^2 - x^2 = \cos^2\alpha \left(\varrho_2^2 - \varrho_1^2\right) - \sin^2\alpha \left(\varrho_2^2 - \varrho_1^2\right) = e^2 \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)$$

oder

$$y^2 - x^2 = e^2 \cos 2\alpha,$$

oder auch

$$x^2 - y^2 = e^2 \cos (180^0 - 2\alpha).$$

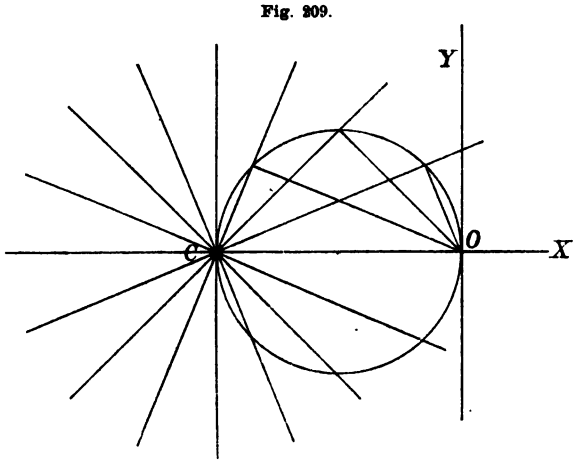
Demnach ist der geometrische Ort eine gleichseitige Hyperbel, die durch die Fixpunkte C_1 und C_2 geht, weil deren Koordinaten $e\cos\alpha$ und $e\sin\alpha$ der Gleichung $y^2 - x^2 = e^2\cos^2\alpha - e^2\sin^2\alpha$ genügen. Ihre Asymptoten aber haben die Richtung ξ, η. Die Halbachse dieser Hyperbel ist gleich $e\sqrt{\cos(180^0 - 2\alpha)}$, der Scheitel liegt also auf der durch

$$r^2 = e^2 \cos (180^0 - 2\alpha)$$

bestimmten Lemniskate.

282) Das durch die Fixpunkte gehende Büschel gleichseitiger Hyperbeln giebt die geometrischen Orte für alle möglichen konstanten Richtungen von Hauptachsen an. Die Figur ist nichts anderes, als

Fig. 209.



die Abbildung der nebenstehenden mit Hülfe der Funktion $Z = \sqrt{z}$, wobei C nach den Fixpunkten C_1 und C_2 transformiert wird. Das Strahlenbüschel durch C giebt das Hyperbelbüschel durch C_1 und C_2, der Fufspunktkreis durch O und C giebt die Lemniskate durch O, C_1 und C_2.

So haben denn die Betrachtungen des vorigen Kapitels neue Bedeutung für die graphische Statik gefunden.

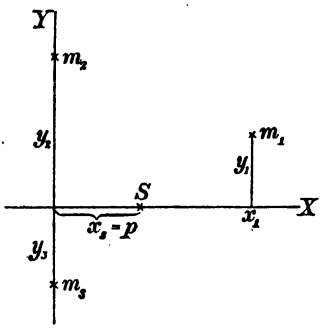
F. Ersatz der homogenen ebenen Fläche F durch drei Massenpunkte nach Reye.

283) Soll eine Fläche F in mechanischer Hinsicht durch drei Massenpunkte m_1, m_2, m_3 ersetzt werden, z. B. bezüglich der Drehung um irgend einen Punkt oder eine Gerade der Ebene, so mufs zunächst sein

1) $$m_1 + m_2 + m_3 = F.$$

Werden hierbei m_1 und m_2 willkürlich gewählt, so ist die dritte Masse durch $m_3 = F - (m_1 + m_2)$ bestimmt.

Fig. 210.



Damit z. B. auch die Centrifugalkräfte übereinstimmen, müssen die statischen Momente der Fläche und des Punktsystems in Bezug auf willkürliche Koordinatenachsen identisch sein, so dafs auch die Schwerpunkte zusammenfallen. Um die Gleichungen möglichst einfach zu machen, kann man die Gerade $m_2 m_3$ zur Y-Achse machen, das vom Schwerpunkte S auf diese Gerade gefällte Lot zur X-Achse. Dann mufs in Bezug auf die Y-Achse sein

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = F x_s,$$

oder, da $x_2 = x_3 = 0$,

2) $$m_1 x_1 = F x_s = F p.$$

In Bezug auf die X-Achse mufs sein

3) $$m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 = F \cdot y_s = F \cdot 0 = 0.$$

Damit auch die Trägheitsmomente übereinstimmen, so mufs für die gewählten Koordinatenachsen sein

$$m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 = T_y$$

oder, da $x_2 = 0 = x_3$ ist,

4) $$m_1 x_1^2 = T_y,$$

und

5) $$m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 + m_3 y_3^2 = T_x.$$

Endlich ist noch Übereinstimmung der Centrifugalmomente erforderlich, d. h. es mufs sein

$$m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 + m_3 x_3 y_3 = M_{xy},$$

oder einfacher

6) $$m_1 x_1 y_1 = M_{xy}.$$

Da die Anzahl der Unbekannten $m_1, m_2, m_3, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ gröfser ist, als die der Gleichungen, so kann man die Gröfse und Lage der drei Massenpunkte nicht durch Rechnung bestimmen, sondern man darf drei Elemente willkürlich wählen und die übrigen sechs berechnen. An Stelle der Rechnung aber können geometrische Beziehungen treten, wie sie aus der Lehre vom geometrischen Orte bekannt sind.

Zunächst ergiebt sich Folgendes: Aus Gleichung 2) und 4) folgt durch Division

$$x_1 = \frac{T_y}{pF} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}},$$

aus 6) und 2) folgt

$$y_1 = \frac{M_{xy}}{m_1 x_1} = \frac{M_{xy}}{pF} = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Nach Nr. 274 ist demnach m_1 der Antipol der Koordinatenachsen in Bezug auf die Centralellipse der Fläche. Ist diese bekannt, so kann also die Lage von m_1 nach Nr. 273 leicht konstruiert werden, sobald nur m_2 und m_3 festgelegt sind.

Was von der Geraden $m_2 m_3$ gilt, gilt auch von den Geraden $m_3 m_1$ und $m_1 m_2$. Also:

Die drei Massenpunkte müssen so liegen, dafs jeder von ihnen der Antipol für die Verbindungslinie der beiden andern in Bezug auf die Centralellipse von F ist.

Angenommen, diese Aufgabe wäre gelöst, dann findet sich die Gröfse der Massen aus den Gleichungen

$$m_1 = \frac{Fp}{x_1},\ m_2 + m_3 = F - m_1,\quad m_2 y_2 + m_3 y_3 = -m_1 y_1.$$

Damit würde die Aufgabe überhaupt erledigt sein.

284) Um weitere Gesichtspunkte aufzufinden, denke man sich die Massen m_1, m_2 und m_3 der Gröfse nach willkürlich gegeben und nach Art der Figur 211 die Centralellipse in das System eingezeichnet, wobei zunächst nur darauf Rücksicht zu nehmen ist, dafs x_1 als Antipol der Koordinatenachsen erscheint.

In Nr. 274 war nun

$$x_1 = \frac{p^2 + a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}{p} = p + \frac{a^2\sin^2\alpha}{p} + \frac{b^2\cos^2\alpha}{p},$$

also

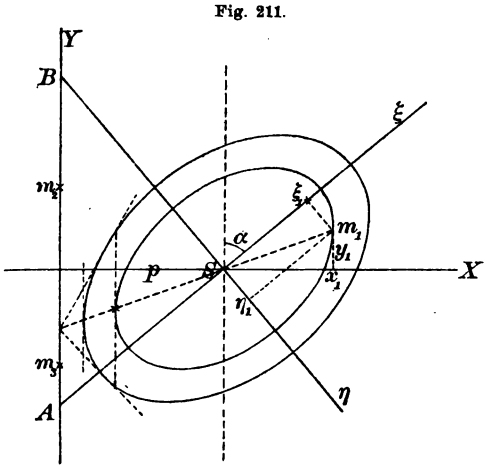
$$\frac{x_1}{p} = 1 + \frac{a^2\sin^2\alpha}{p^2} + \frac{b^2\cos^2\alpha}{p^2},$$

oder, da nach Gleichung 2)

$$\frac{x_1}{p} = \frac{F}{m_1},\quad \text{also}\quad \frac{x_1}{p} - 1 = \frac{F}{m_1} - 1 = \frac{F - m_1}{m_1}$$

ist,

Fig. 211.



$$\frac{F - m_1}{m_1} = \frac{a^2\sin^2\alpha}{p^2} + \frac{b^2\cos^2\alpha}{p^2}.$$

Dort war ferner

$$\xi_1 = \frac{a^2}{p}\sin\alpha,\quad \eta_1 = \frac{b^2}{p}\cos\alpha,$$

so dafs man hat

$$\frac{F - m_1}{m_1} = \frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\eta_1^2}{b^2}.$$

Demnach ist der geometrische Ort von m_1 eine Ellipse mit dem Mittelpunkte S, die der Centralellipse ähnlich ist und ähnlich zu ihr liegt. Ihre Achsen sind von der Länge

$$a_1 = a\sqrt{\frac{F - m_1}{m_1}},\quad b_1 = b\sqrt{\frac{F - m_1}{m_1}}.$$

Ebenso ist es mit den andern Massenpunkten. Also:

Denkt man sich m_1, m_2 (und dadurch m_3) der Gröfse nach gewählt, so sind die drei Punkte in ihrer Lage auf drei Ellipsen mit dem Mittelpunkte S beschränkt, die ähnlich und ähnlich liegend zur Centralellipse sind und folgende Gleichungen haben:

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\eta_1^2}{b^2} = \frac{F - m_1}{m_1}, \quad \frac{\xi_2^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2} = \frac{F - m_2}{m_2},$$

$$\frac{\xi_3^2}{a^2} + \frac{\eta_3^2}{b^2} = \frac{F - m_3}{m_3}.$$

285) Einen von den Punkten darf man auf der ihm entsprechenden Ellipse willkürlich legen. Die Lage der andern ergiebt sich dann aus Folgendem:

Es wird sich zeigen, dafs das von den Punkten gebildete Dreieck einen konstanten Inhalt haben mufs.

Nach Gleichung 1) und 5) ist nämlich

$$m_2 + m_3 = F - m_1,$$

$$m_2 y_2^2 + m_3 y_3^2 = T_x - m_1 y_1^2,$$

folglich durch Multiplikation

$$m_2^2 y_2^2 + m_2 m_3 \left(y_2^2 + y_3^2\right) + m_3^2 y_3^2 = T_x (F - m_1) - F m_1 y_1^2 + m_1^2 y_1^2.$$

Da nach Gleichung 3)

$$m_2 y_2 + m_3 y_3 = - m_1 y_1$$

und durch Quadrierung

$$m_2^2 y_2^2 + 2 m_2 m_3 y_2 y_3 + m_3^2 y_3^2 = m_1^2 y_1^2$$

ist, so ergiebt sich durch Subtraktion

$$m_2 m_3 \left(y_2^2 - 2 y_2 y_3 + y_3^2\right) = T_x (F - m_1) - F m_1 y_1^2.$$

Multipliziert man beiderseits mit $m_1 x_1^2$, so folgt

$$m_1 m_2 m_3 (y_2 - y_3)^2 x_1^2 = (F - m_1) m_1 x_1^2 T_x - F m_1^2 x_1^2 y_1^2.$$

Nun ist der Inhalt des von den drei Punkten gebildeten Dreiecks

$$\Delta = \tfrac{1}{2} (y_2 - y_3) x_1,$$

folglich

$$4 \Delta^2 m_1 m_2 m_3 = 4 \cdot \tfrac{1}{4} (y_2 - y_3)^2 x_1^2 m_1 m_2 m_3$$

$$= (F - m_1) m_1 x_1^2 T_x - F m_1^2 x_1^2 y_1^2.$$

Da nach Gleichung 6)

$$m_1 x_1 y_1 = M_{xy}$$

und, wenn T_s das Trägheitsmoment von F in Bezug auf die senkrechte Schwerpunktsachse bedeutet,

$$m_1 x_1^2 = T_y = T_s + Fp^2$$

ist, so folgt

$$4\Delta^2 m_1 m_2 m_3 = (F - m_1)(T_s + Fp^2) T_x - FM_{xy}^2$$

oder

$$4\Delta^2 m_1 m_2 m_2 = FT_s T_x - FM_{xy}^2 + T_x\left[F^2 p^2 - m_1 (T_s + Fp^2)\right].$$

Setzt man wieder $m_1^2 x_1^2 = F^2 p^2$ und $m_1 (T_s + Fp^2) = m_1^2 x_1^2$ ein, so wird der dritte Posten gleich Null, und es bleibt stehen

$$4\Delta^2 m_1 m_2 m_3 = F\left(T_s T_x - M_{xy}^2\right),$$

woraus folgt

$$4\Delta^2 \frac{m_1 m_2 m_3}{F} = T_s T_x - M_{xy}^2.$$

Nach dem Verschiebungssatze für das Centrifugalmoment ist dieses für die X-Achse und die durch S gelegte Senkrechte ebenso grofs, wie M_{xy}, so dafs man schreiben kann

$$M_{xs} = M_{xy}.$$

Nach Nr. 152 ist dann

$$M_{xs}^2 = T_x T_s - a^2 b^2 F^2$$

oder

$$T_x T_s - M_{xs}^2 = a^2 b^2 F^2.$$

Dies in die obige Gleichung eingesetzt giebt

$$4\Delta^2 \frac{m_1 m_2 m_3}{F} = a^2 b^2 F^2,$$

so dafs

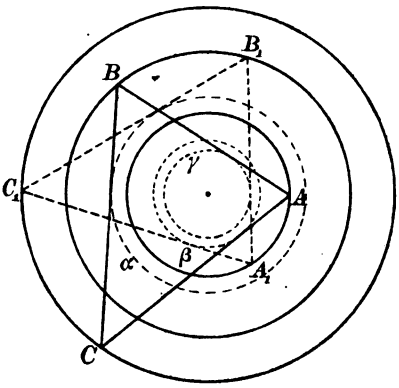
$$\Delta = \frac{ab}{2} \sqrt{\frac{F^3}{m_1 m_2 m_3}}.$$

Damit ist nachgewiesen, dafs das von den Massenpunkten gebildete Dreieck nicht von der Lage der Punkte auf den drei Ellipsen abhängig ist, sondern einen konstanten Inhalt hat. Hat man eins von diesen Dreiecken, so kann man unendlich viele andere leicht konstruieren. Sind nämlich r_1, r_2, r_3 die Radien von drei concentrischen Kreisen, auf deren Umfängen die Ecken eines Dreiecks ABC liegen, so berührt jede Seite einen concen-

trischen Kreis α, β, γ. Beginnt man das Tangentenziehen an einer andern Stelle A_1 des ersten Kreises, so schliefst die Figur stets und erhält konstanten Inhalt.

Durch Parallelprojektion entsteht eine Figur aus concentrischen und ähnlichen Ellipsen. Auch bei diesen schliefst die Tangentenkonstruktion stets und giebt ebenfalls flächengleiche Dreiecke. Daraus ergeben sich unendlich viele mögliche Lagen der drei Punkte.

Fig. 212.



286) **Aufgabe.** Eine Fläche F durch drei mit gleicher Masse belegte Punkte zu ersetzen.

Auflösung. Jede der Massen ist gleich $\frac{F}{3}$ zu setzen.

Die drei oben besprochenen Ellipsen fallen in eine einzige zusammen, deren Gleichung wird

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = \frac{F - \frac{F}{3}}{\frac{F}{3}} = 2$$

oder

$$\frac{\xi^2}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{\eta^2}{(b\sqrt{2})^2} = 1.$$

Ihre Achsen sind also das $\sqrt{2}$-fache von den Achsen der Centralellipse.

Das von den drei Massenpunkten gebildete Dreieck erhält den Inhalt

$$\Delta = \frac{ab}{2}\sqrt{\frac{F^2}{\frac{F^2}{27}}} = \frac{3ab}{2}\sqrt{3}.$$

Dies ist aber, wie leicht gezeigt werden kann, der Inhalt der gröfsten Dreiecke, die sich überhaupt einer Ellipse einbeschreiben lassen.

Das gröfste aller Dreiecke, die dem Kreise einbeschrieben werden können, ist, wie leicht bewiesen werden kann, das gleichseitige. Sein Inhalt ist $\frac{3r^2}{4}\sqrt{3}$.

Er verhält sich zum Kreisinhalte, wie

$$\frac{3r^2}{4}\sqrt{3} : r^2\pi \quad \text{oder wie} \quad \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} : 1.$$

Alle diese Dreiecke sind einem Kreise vom Radius $\frac{r}{2}$ umbeschrieben.

Durch Parallelprojektion folgt, dafs dasselbe Verhältnis zwischen den gröfsten Dreiecken der Ellipse und ihrem Inhalte stattfindet, dafs also

$$\Delta : a_1 b_1 \pi = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} : 1,$$

also

$$\Delta = \frac{a_1 b_1 3\sqrt{3}}{4}$$

ist. Hier aber war

$$a_1 = a\sqrt{2}, \quad b_1 = b\sqrt{2},$$

also

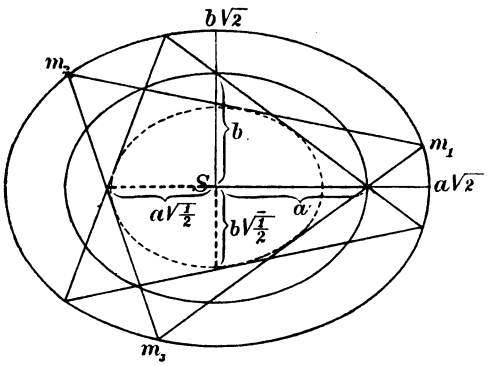
$$a_1 b_1 = 2ab,$$

es ist also

$$\Delta = \frac{3}{2} ab\sqrt{3}.$$

Damit ist die obige Behauptung bewiesen. Alle diese Dreiecke sind aber einer ähnlichen Ellipse halben Mafsstabes umbeschrieben.

Fig. 213.



In Fig. 213 sei die mittlere Ellipse die Centralellipse der Fläche F mit den Halbachsen a und b; die gröfste Ellipse habe die Halbachsen $a\sqrt{2}$ und $b\sqrt{2}$, die kleinste die Halbachsen $a\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $b\sqrt{\frac{1}{2}}$. Um die kleinste Ellipse lassen sich unendlich viele Tangentendreiecke legen, die ihre Ecken auf der gröfsten Ellipse haben. Bringt man in den Ecken eines beliebigen dieser Dreiecke Massen von der Gröfse $\frac{F}{3}$ an, so können diese Massen die Fläche F in mechanischer Hinsicht ersetzen.

287) Der Hauptvorteil der Reyeschen Methode beruht darin, dafs man die statischen und die Trägheitsmomente einer Figur für beliebige Achsen sofort hinschreiben kann, sobald man eins der Punktdreiecke kennt. Sind nämlich x_1, x_2, x_3 die Entfernungen der

Punkte von der Achse, so ist das gesuchte $T_1 = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2$, dagegen ist $M = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3$, also z. B.

$$\frac{T_x}{M_y} = \frac{m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2}{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}.$$

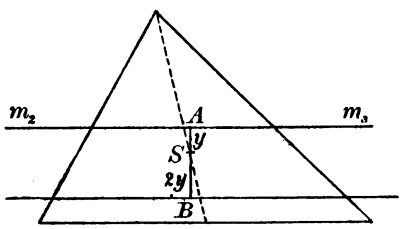
Dasselbe kann in Bezug auf jede Senkrechte zu jener Achse gemacht werden, wodurch man T_y erhält, so dafs man auch T_p ableiten kann. Ferner wird $M_{xy} = m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 + m_3 x_3 y_3$, woraus sich z. B. $\frac{T_x}{M_{xy}}$ und $\frac{T_y}{M_{xy}}$ entwickeln läfst.

Endlich lassen sich durch Parallelprojektion (Collineation) Schlüsse auf andere Figuren ziehen. Kennt man die Centralellipse, so sind auch die beiden andern Ellipsen bekannt und alle Berechnungen kommen auf die eines Punktdreiecks hinaus.

Einige Beispiele werden dies erläutern.

288) Das Dreieck. Sollen die Punkte gleiche Massen $\frac{F}{3}$ haben, so mufs für den Fall, dafs die Verbindungslinie $m_2 m_3$ der Basis parallel sein soll, $SA : SB = 1 : 2$ sein. Es folgt also

Fig. 214.



$$\frac{F}{3} y^2 + \frac{F}{3} y^2 + \frac{F}{3} (2y)^2 = \frac{bh^3}{36} = \frac{Fh^2}{18}$$

oder

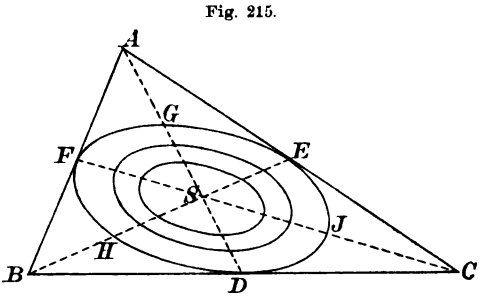
$$2y^2 = \frac{h^2}{18},$$

also

$$y = \frac{h}{6},\ 2y = \frac{h}{3},$$

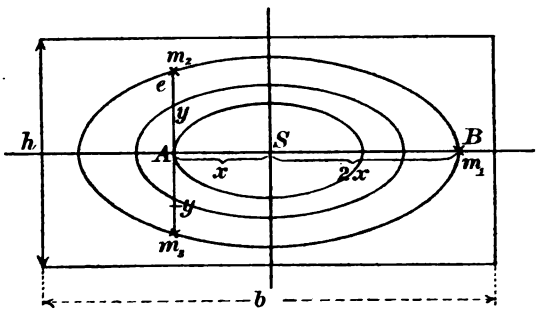
d. h. der untere Punkt fällt in die Grundlinie, die beiden andern in die Verbindungslinie der Halbierungspunkte. Für das gleichseitige Dreieck also ist das Fufspunktdreieck der Höhen, für jedes beliebige Dreieck durch Parallelprojektion das Fufspunktdreieck der Mittellinien eins der gesuchten. Von der äufseren Ellipse hat man, da $SG = GD$, $SH = SE$, $SJ = SF$ sein mufs, sechs Punkte. Diese Ellipse aber ist identisch mit der in D, E, F berührenden. Dies konnte auch durch Projektion aus dem Falle des gleichseitigen Dreiecks geschlossen werden, wo es sich um

Fig. 215.



den In-Kreis handelt. Die Verkleinerung auf $\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $\frac{1}{2}$ des Maſsstabes giebt die Centralellipse und die einbeschriebene Ellipse für sämtliche möglichen Punktdreiecke. Die Richtungen der Hauptachsen sind mit Hülfe eines Kreises um S, der in symmetrisch liegenden Punkten schneidet, bequem zu bestimmen.

Fig. 216.



289) Das Rechteck. Die Ellipse der Punktdreiecke für gleiche Massen hat die Mittellinien zur Symmetrieachse. Demnach müssen zwei der Dreiecke symmetrisch, wie m_1, m_2, m_3 liegen, wobei $SB = 2AS$ sein muſs. Es folgt für die X-Achse

$$T_x = \frac{F}{3}y^2 + \frac{F}{3}y^2 + \frac{F}{3}0^2 = \frac{bh^3}{12} = \frac{Fh^2}{12},$$

also

$$\frac{2}{3}y^2 = \frac{h^2}{12}, \quad y = h\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{h}{2\sqrt{2}}.$$

Für die y-Achse folgt

$$T_y = \frac{F}{3}x^2 + \frac{F}{3}x^2 + \frac{F}{3}(2x)^2 = 2Fx^2 = \frac{hb^3}{12} = \frac{Fb^2}{12},$$

also

$$x^2 = \frac{b^2}{24},$$

daher

$$x = \frac{b}{\sqrt{24}} = \frac{b}{2\sqrt{6}}, \quad 2x = \frac{b}{\sqrt{6}}.$$

Durch Symmetrie gegen die beiden Achsen findet man drei neue Punkte der Ellipse, die also bestimmt ist. Die eine Halbachse ist $a_1 = 2x = \frac{b}{\sqrt{6}}$, die andere bestimmt sich, wenn man Vorkenntnisse nicht voraussetzt, aus dem Punkte m_2, dessen Koordinaten der Ellipsengleichung genügen müssen, also aus

$$\frac{\left(\frac{b}{\sqrt{24}}\right)^2}{a_1^2} + \frac{\left(\frac{h}{\sqrt{8}}\right)^2}{b_1^2} = 1$$

oder

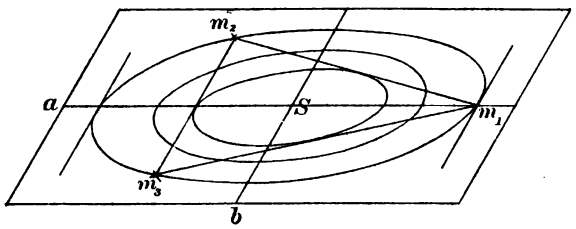
$$\frac{b^2}{24\frac{b^2}{6}} + \frac{h^2}{8\,b_1^2} = 1$$

oder $$\frac{1}{4} + \frac{h^2}{8\,b_1^2} = 1,$$

also $$\frac{h^2}{8\,b_1^2} = \frac{3}{4},\ \text{d. h. } b_1 = h\sqrt{\frac{1}{6}}.$$

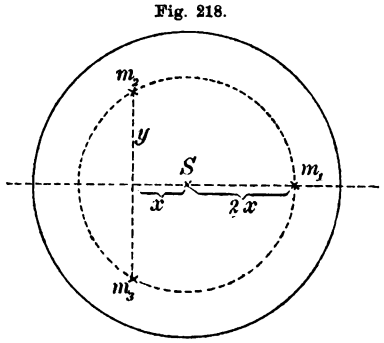
Die Halbachsen verhalten sich also wie b und h, was nach Nr. 135 selbstverständlich war.

Fig. 217.



290) Für das Parallelogramm ergeben sich die drei Ellipsen durch Parallelprojektion der Figur 216. Ihre konjugierten Halbachsen bestimmen sich als $\frac{b}{\sqrt{6}}$ und $\frac{a}{\sqrt{6}}$. Eins der Punktdreiecke ist eingezeichnet. Die drei Ellipsen sind ähnlich der einbeschriebenen Hauptellipse des Parallelogramms.

Fig. 218.



291) Kreis. Aus

$$\frac{F}{3}y^2 + \frac{F}{3}y^2 + \frac{F}{3}0^2 = \frac{2}{3}Fy^2 = \frac{r^4\pi}{4} = \frac{Fr^2}{4}$$

folgt $$y = r\sqrt{\frac{3}{8}}.$$

Aus $$\frac{2}{3}Fx^2 + \frac{F}{3}(2x)^2 = \frac{Fr^2}{4}$$

folgt

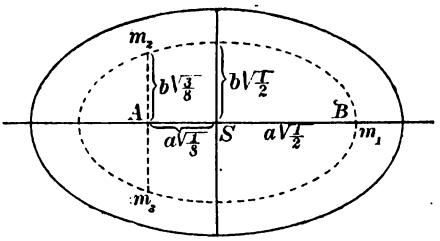
$$x = r\sqrt{\frac{1}{8}},\ 2x = a_1 = r\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Die drei Punkte bilden einen Kreis mit Radius $a_1 = r\sqrt{\frac{1}{2}}$. Die beiden andern Kreise sind leicht einzuzeichnen.

292) Ellipse. Durch Projektion folgt aus dem Vorigen $SA = a\sqrt{\frac{1}{8}}$, für m_1 folgt der Abstand $a\sqrt{\frac{1}{2}}$, für m_2 und m_3 der Abstand $\pm\, b\sqrt{\frac{3}{8}}$. Nun mufs m_2 der Ellipsengleichung genügen, d. h. es mufs sein

$$\frac{\left(\frac{a}{\sqrt{8}}\right)^2}{\left(a\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} + \frac{\left(b\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2}{b_1^2} = 1,$$

Fig. 219.



d. h. $\frac{1}{4} + \frac{3\,b^2}{8\,b_1^2} = 1$

oder $\frac{3\,b^2}{8\,b_1^2} = \frac{3}{4}$.

Es folgt $b_1 = b\sqrt{\frac{1}{2}}$. Die beiden Ellipsen sind also ähnlich, die andern Ellipsen sind leicht einzuzeichnen.

In ähnlicher Weise kann man mit andern Gestalten fortfahren.

Zahlreiche weitere Beispiele lassen sich aus den früheren Resultaten entnehmen. Im übrigen sei auf die Reyeschen Abhandlungen in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Band 10, Seite 433 und in der Zeitschrift deutscher Ingenieure, Band 19, Seite 401 verwiesen. Hier handelte es sich nur darum, die Möglichkeit des Ersatzes durch drei Punkte nachzuweisen.

293) Schlufsbemerkung zu den graphischen Methoden. Von den graphischen Methoden, deren Wichtigkeit in höherem Grade auf dem Gebiete des Bauwesens, als auf dem des Maschinenbaues liegt, ist bisher noch keine zur unbestrittenen Alleinherrschaft gelangt. Aus diesem Grunde mufsten die bekannter gewordenen hier sämtlich zur Sprache kommen. Welche von ihnen sich einen dauernden Platz auf dem Unterrichtsgebiete und in der Praxis sichern wird, das mufs die Zukunft lehren. Wie auf andern mathematischen Gebieten, so scheint es auch hier das Richtige zu sein, jede Methode an der Stelle anzuwenden, wo gerade sie am schnellsten und einfachsten zum Ziele führt. Es gab eine Zeit, wo die graphische Statik etwas überschätzt wurde. Uns sind hervorragende Lehrer des Maschinenbaues bekannt, die sie so zu sagen gar nicht anwenden. Eine Reihe von Errungenschaften der graphischen Statik ist zwar von hohem theoretischen, aber von geringerem praktischen Werte. Einen Vorzug besitzt sie: anschaulicher zu sein, als der abstrakte Funktionsbegriff oder die Integralformel. Wo es sich nicht um allzugrofse Genauigkeit handelt, und wo Übung im Gebrauche des Polarplanimeters und sonstiger mechanischer Integratoren*) vorhanden ist, scheint sie am ersten am Platze zu sein. Der Blick dafür, welche besondere Methode in den einzelnen Fällen am besten zu gebrauchen ist, schärft sich durch den praktischen Gebrauch. An eine vollständige Verdrängung der rechnenden Methoden ist nicht zu denken.

*) Das sonst gebräuchliche Wort „Integraph“ ist als sprachliche Mifsbildung zu vermeiden, da integer und γράφω in der Zusammensetzung etwas ganz anderes ergeben würden.

Abschnitt VIII.

Schwerpunkte und statische Momente homogener Körper.

294) Bei den Flächen zerfielen die Momente jeder Ordnung in zwei Gruppen, polare und axiale Momente. Bei den Körpern dagegen sind drei Gruppen zu unterscheiden, denn je nachdem die Abstände der Körperteilchen auf einen Punkt oder Pol, auf eine geradlinige Achse, auf eine Ebene bezogen werden, handelt es sich um polare, axiale und Plan-Momente.

Am Beispiele der Halbkugel mögen die entsprechenden Momente erster Ordnung erläutert werden.

Teilt man die Wölbung mittelst zweier Scharen von Meridianen und Parallelkreisen in kleine „Quadrate“ ein und verbindet man deren Eckpunkte mit dem Kugelmittelpunkte, so ist die Halbkugel in ein System von Pyramiden eingeteilt. Der Schwerpunkt jeder Pyramide hat von dem Mittelpunkte die Entfernung $\frac{3}{4}r$. Demnach ist $\frac{3}{4}r$ der mittlere Abstand aller Punkte der Halbkugel vom Kugelmittelpunkte, und $\frac{3}{4}r \cdot \frac{2}{3}r^3\pi = \frac{r^4\pi}{2}$ ist das Polarmoment erster Ordnung in Bezug auf den Mittelpunkt.

Teilt man, wie es in Fig. 54 angedeutet ist, die Halbkugel in unendlich viele Meridiankeile ein, so liegen die Schwerpunkte derselben nach Nr. 50) auf einem Kreise vom Radius $\frac{3\pi}{16}r$. Demnach ist $\frac{3\pi}{16}r$ der mittlere Abstand der Halbkugelpunkte von dem als Achse gewählten Durchmesser, und $\frac{3\pi}{16}r \cdot \frac{2}{3}r^3\pi = \frac{r^4\pi^2}{8}$ ist das Axialmoment erster Ordnung in Bezug auf diese Achse.

Der Schwerpunkt der Halbkugel liegt in der Entfernung $\frac{3}{8}r$ von der Grundfläche. Demnach ist $\frac{3}{8}r$ der mittlere Abstand der Halbkugelpunkte von der Grundfläche und $\frac{3}{8}r \cdot \frac{2}{3}r^3\pi = \frac{r^4\pi}{4}$ ist das Planmoment erster Ordnung in Bezug auf jene Ebene.

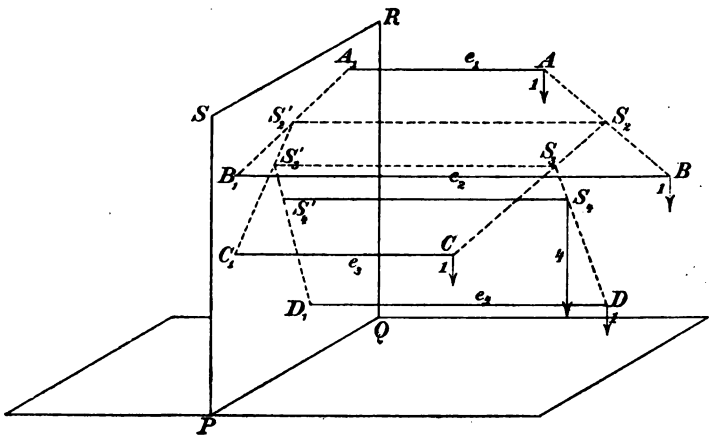
Ist eine Unterscheidung nötig, so kann das Polarmoment mit M_p, das Axialmoment mit M_a, das Planmoment, weil es auf eine Fläche bezogen ist, mit M_f bezeichnet werden.

Das vorliegende Kapitel beschäftigt sich nur mit den Momenten erster Ordnung, und zwar besonders mit den Planmomenten, die mit der Lehre vom Schwerpunkt zusammenhängen. Die Momente zweiter Ordnung kommen im nächsten Abschnitte zur Sprache.

295) Der Schwerpunkt eines Systems homogener Massenpunkte.

In der Mechanik wird der Schwerpunkt definiert als der Angriffspunkt eines Systems paralleler Kräfte, wobei die Richtung

Fig. 220.



dieser Kräfte gleichgültig ist. Angenommen wird, dafs in den einzelnen Punkten gleichviel Masse angebracht sei, dafs alle Punkte gleich schwer seien. Dann läfst sich beweisen, dafs der Schwerpunkt der Punkt mittleren Abstandes von jeder beliebigen Ebene ist.

Beweis: Man denke sich die gegebenen Massenpunkte A, B, C, D durch die Lote e_1, e_2, e_3, e_4 mit der gegebenen Ebene $PQRS$ starr verbunden, die Ebene denke man sich senkrecht auf eine andere gestellt und die in jedem Punkte wirkende Schwerkraft als die Krafteinheit angenommen.

Der Hebelarm jeder Kraft in Bezug auf die Achse PQ, um die sich die belastete Ebene mit den Punkten drehen will, wird gefunden, indem man von ihr aus auf jede Kraftlinie ein Lot fällt. Diese Lote erhalten die Längen der Abstände e_1, e_2, e_3, e_4. Die statischen Momente werden $e_1 \cdot 1$, $e_2 \cdot 1$, $e_3 \cdot 1$ und $e_4 \cdot 1$. Denkt man sich

im Schwerpunkte S_4, dem Angriffspunkte der Resultante, die Kraft 4 angebracht, und ist e_s die Entfernung des Schwerpunktes von der Ebene, so ist das statische Moment der Resultante gleich $e_s \cdot 4$. Dieses Moment mufs gleich der Summe der Einzelmomente sein, also wird

$$4\,e_s = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$$

und daher

$$e_s = \frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4}{4}.$$

Ebenso wird für den Schwerpunkt von n Punkten gefunden

$$e_s = \frac{e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_n}{n}.$$

Der Schwerpunkt ist also der Punkt mittleren Abstandes von jeder beliebigen Ebene.

296) Bekanntlich kann er folgendermafsen gefunden werden:

Man halbiere AB, verbinde den Halbierungspunkt S_2 mit C und schneide von der Verbindungslinie den dritten Teil S_2S_3 ab. Man verbinde S_3 mit D und schneide auf S_3D den vierten Teil S_3S_4 ab, dann ist S_4 der Schwerpunkt der vier Massenpunkte u. s. w.

Beweis: Die Kräfte in A und B kann man ersetzen durch die in S_2 wirkende Resultante 2. Am Hebel S_2C wirkt in S_2 die Kraft 2, in C die Kraft 1, beide können ersetzt werden durch die in S_3 wirkende Resultante 3. Am Hebel S_3D wirkt in S_3 die Kraft 3, in D die Kraft 1, beide können ersetzt werden durch die in S_4 wirkende Resultante 4 u. s. w.

297) **Bemerkungen.** Diese Konstruktion ist erstens unabhängig von der Richtung der Parallelkräfte, der obige Satz gilt also von jeder beliebigen Ebene. Zweitens ist sie unabhängig von der Reihenfolge der Punkte. Man kann daraus geometrische Schlüsse ziehen.

Für drei Punkte folgt, dafs die drei Mittellinien des Dreiecks einander in einem Punkte schneiden, der von jeder den dritten Teil abschneidet.

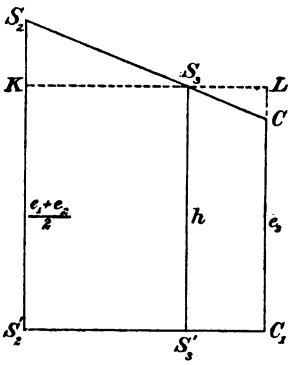
Für vier Punkte folgt, dafs die vier Mittellinien des Tetraeders sich in einem Punkte schneiden, der von jeder den vierten Teil abschneidet.

Diese Art, geometrische Sätze mit Hülfe der Lehre vom Schwerpunkte zu finden, bezeichnet man als den barycentrischen Kalkül. Im Methodischen Lehrbuche, Band II, sind z. B. die Sätze von Ceva und Menelaos so bewiesen worden. Die Formel für e_s wird dort in der Koordinatenlehre abgeleitet. Die Guldinschen Regeln, die Sätze über abgeschrägte Prismen und über die Schwerpunkte von Drehungskörpern bezw. ihrer Sektoren, gehören hierher.

298) Dafs der so gefundene Schwerpunkt der Punkt mittleren Abstandes ist, läfst sich auch rein geometrisch beweisen.

Geometrischer Beweis. In Fig. 1 ist das Lot $S_2'S_2' = \frac{e_1 + e_2}{2}$ als mittlere Höhe des Trapezes A_1ABB_1. Das dortige Trapez $C_1CS_2S_2'$ ist in Fig. 2 besonders gezeichnet und durch S_3 die Parallele KL zur Grundlinie gelegt. Wegen des Teilungsverhältnisses 1 : 2 der Linie S_2C ist

Fig. 221.



$$S_2K = 2LC,$$

d. h.

$$\frac{e_1 + e_2}{2} - h = h - e_3$$

oder

$$e_1 + e_2 - 2h = 2h - e_3,$$

also

$$h = \frac{e_1 + e_2 + e_3}{3}.$$

Ebenso ist das nächstfolgende Trapez zu behandeln, in dem $S_3K = 3 \cdot LD$ wird u. s. w.

299) Die rein geometrische Definition des Schwerpunktes ist also folgende: Der Schwerpunkt eines Systems homogener Massenpunkte ist der Punkt mittleren Abstandes von jeder beliebigen Ebene.

Mit Hülfe dreier nicht paralleler Ebenen, z. B. der drei Koordinatenebenen, kann er bestimmt werden.

Sind die Raumkoordinaten der n Punkte $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; \cdots x_n, y_n, z_n$, so sind die Schwerpunktskoordinaten

$$x_s = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}, \quad y_s = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n}{n},$$

$$z_s = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n}{n}.$$

Sind in den einzelnen Punkten die Massen $m_1, m_2, m_3, \cdots m_n$ angebracht, so sind die Schwerpunktskoordinaten, wie sich ganz ebenso zeigen läfst,

$$x_s = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{M_x}{m},$$

$$y_s = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{M_y}{m},$$

$$z_s = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + \cdots + m_nz_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{M_z}{m}$$

wo M_x, M_y, M_z die Planmomente des Systems für die Ebenen YZ, ZX und XY sind und m die Gesamtmasse bedeutet.

300) Die gefundenen Formeln sind allerdings nur für eine endliche Anzahl von Massenpunkten abgeleitet worden; da aber die Zahl derselben beliebig grofs angenommen werden darf, läfst man die Beweise auch für unendlich viele Punkte gelten. Jede Linie, jede Fläche und jeder Körper kann als aus unendlich vielen „Punkten" bestehend angenommen werden, und so bleibt der Schwerpunkt auch für solche Gebilde der Punkt mittleren Abstandes in Bezug auf jede beliebige Ebene, nur mufs die Anordnung der Punkte als eine homogene angenommen werden. Dies entspricht der in der Mechanik gebräuchlichen Annahme, dafs der Körper überall gleich dicht sei, dafs er überall dasselbe spezifische Gewicht habe.

301) **Allgemeine Sätze.** Besitzt ein Körper eine Symmetrieebene, so geht diese durch den Schwerpunkt; besitzt er zwei Symmetrieebenen, so geht ihre Schnittlinie durch den Schwerpunkt; besitzt er drei Symmetrieebenen, die nicht durch dieselbe Gerade gelegt sind, so schneiden sich die drei Schnittlinien im Schwerpunkte. Sind mehr als drei Symmetrieebenen vorhanden, so gehen sämmtliche Schnittlinien derselben durch den Schwerpunkt. Der Schwerpunkt regelmäfsiger Körper fällt daher mit dem Mittelpunkte zusammen.

Stimmen die Querschnitte zweier Körper im Sinne des Cavalierischen Prinzips überein, so liegen ihre Schwerpunkte in derselben Höhe. An Stelle der Gleichheit der zusammengehörigen Querschnitte kann auch ein konstantes Verhältnis der Flächeninhalte treten. Der Beweis für den ersten Fall liegt darin, dafs je zwei zusammengehörige Querschnitte in Bezug auf die Grundfläche gleiche statische Momente haben. Demnach stimmen auch die Momentsummen überein. Bei beiden Körpern wird $h_s = \frac{M}{J} = \frac{\text{statisches Moment}}{\text{Inhalt}}$. Entsprechendes geschieht im zweiten Falle.

Die oben gegebenen Formeln bleiben auch dann richtig, wenn die Ebene, auf welche die Abstände bezogen sind, den Körper schneidet. Dabei sind die auf der einen Seite befindlichen Abstände als positiv, die andern als negativ einzurechnen. Geht die Ebene durch den Schwerpunkt des Körpers, so ist der mittlere Abstand gleich Null.

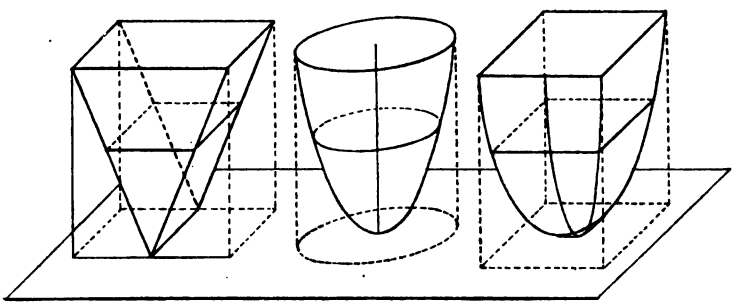
Für zahlreiche Körper ergiebt sich die Schwerpunktslage durch einfache Betrachtungen, die hier unterbleiben können; für viele andere ist sie in den früheren Kapiteln bestimmt worden. Hier soll eine Zusammenstellung des Wichtigsten gegeben werden.

302) Körper von der Ordnung Null. Bei senkrechten und schrägen Prismen und Cylindern liegt der Schwerpunkt im Halbierungspunkte der Mittellinie, d. h. der Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden parallelen Grundflächen.

Solche Körper werden als solche von der Ordnung Null bezeichnet, weil der Querschnitt von der Form $q_y = a = ay^0$ ist. Alle früher behandelten ebenen Flächen, deren Schwerpunkte bestimmt worden sind, geben zu entsprechenden Übungsbeispielen Anlafs.

303) Körper erster Ordnung, deren Querschnitt von der Form $q_y = by^1$ ist, sind z. B. der Dreieckskörper, das Drehungsparaboloid, das elliptische Paraboloid, parabolisch begrenzte

Fig. 222.



Körper, deren Querschnitte ähnliche Vielecke sind, z. B. Quadrate, regelmäfsige Sechsecke und dergl. Die letzteren Körper können bei umgekehrter Aufstellung als parabolische Gewölbe aufgefafst werden.

Weil bei dem ersten dieser Körper der Schwerpunkt in der Höhe $\frac{2}{3}h$ liegt, liegt er bei sämtlichen in dieser Höhe. Dies gilt auch dann, wenn, wie in Fig. 223, die Schwerpunkte der Querschnitte auf schiefer Achse angeordnet sind.

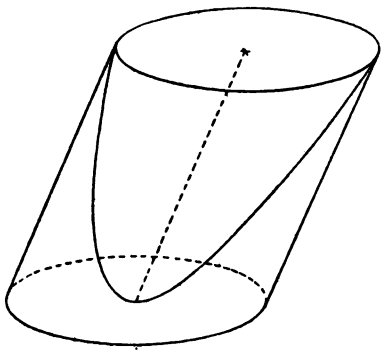
304) Stumpfe der Körper erster Ordnung. Diese Stumpfe sind in Fig. 3 mit angedeutet worden. Der Schwerpunkt des ersten läfst sich mit Hülfe der Trapezformel berechnen. Ist G_1 die kleinere,

G_2 die gröfsere Grundfläche und ist h die Höhe des Stumpfes, so folgt nach Nr. 4 als Schwerpunktshöhe

$$h_s = \frac{h\,(G_1 + 2\,G_2)}{3\,(G_1 + G_2)}.$$

Dies gilt nach Cavalieri überhaupt von den Körpern dieser Art.

Fig. 223.



305) Eine zweite Berechnungsmethode ergiebt sich nach Nr. 164 folgendermafsen:

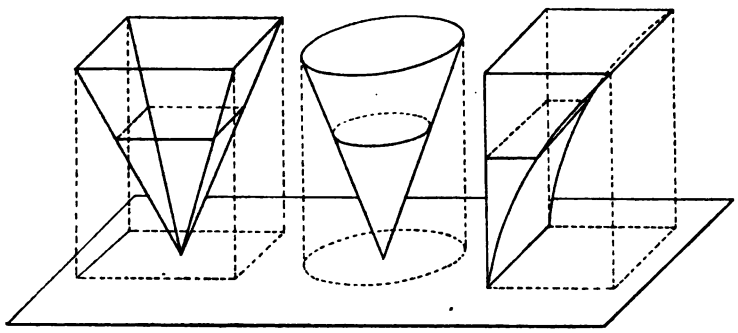
Ist, von der gemeinschaftlichen Grundebene der Fig. 222 aus gerechnet, h_1 die kleinere, h_2 die gröfsere Höhe, so ist bei Querschnittsformel $q_y = by$ die Schwerpunktshöhe

$$h_s = \frac{M}{J} = \frac{\frac{bh_2^3}{3} - \frac{bh_1^3}{3}}{\frac{bh_2^2}{2} - \frac{bh_1^2}{2}} = \frac{2}{3}\,\frac{h_2^3 - h_1^3}{h_2^2 - h_1^2},$$

was noch mit $h_2 - h_1$ gekürzt werden könnte.

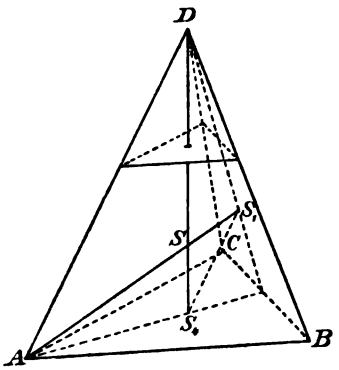
306) Körper zweiter Ordnung, deren Querschnitt von der Form $q_y = cy^2$ ist, sind z. B. die Pyramiden und die Kegel

Fig. 224.



von beliebiger Grundfläche, aufserdem der in Fig. 224 dargestellte parabolische Cylinder. Bei sämtlichen liegt der Schwerpunkt in der Höhe $\frac{3}{4}h$. Dies folgt nach Nr. 164 aus der Formel

Fig. 225.



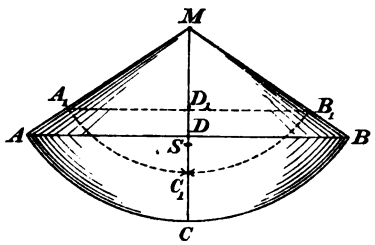
$$h_s = \frac{M}{J} = \frac{\frac{ch^4}{4}}{\frac{ch}{3}} = \frac{3}{4}h,$$

läfst sich aber auch für die Pyramide durch eine geometrische Betrachtung nachweisen und gilt dann nach Cavalieri für die sämtlichen Körper dieser Gruppe. Alle Schichten der in Fig. 225 dargestellten Pyramide haben nämlich die Schwerpunkte in der Mittellinie DS_4, in dieser mufs also der Schwerpunkt liegen. Dasselbe gilt von der Mittellinie AS_1. Die Dreiecke ASD und S_1SS_4 sind ähnlich und ihr Mafsstabverhältnis ist 3 : 1, folglich ist $S_4S = \frac{1}{3}SD$, folglich $S_4S = \frac{1}{4}S_4D$ und daher bei dieser Aufstellung $h_s = \frac{1}{4}h$.

An Stelle der in Figur 224 dargestellten Körper können auch solche mit schiefen Mittellinien (bezw. schiefen Seitenflächen) treten.

307) Anwendung auf den Kugelsektor. Wie bei der Berechnungsmethode der Kalotte denke man sich den Sektor in lauter Pyramiden zerlegt, die ihre unendlich kleine Basis in der Kalotte haben, deren Spitze aber in M liegt. Alle diese Pyramiden haben ihre Schwerpunkte in der Entfernung $\frac{3}{4}r$ von M. Die Schwerpunkte bilden also selbst eine Kalotte, die der gegebenen ähnlich ist. Der Schwerpunkt des Sektors stimmt überein mit dem der neuen Kalotte. Zur Hülfskugel gehört ein umbeschriebener senkrechter Cylinder. Jede Horizontalschicht seiner Mantels ist von der Fläche $2r\pi h_1$, und ebenso grofs ist jede Schicht der Kalotte. Weil nun der Mantel des Hülfscylinders seinen Schwerpunkt in halber Höhe hat, so hat auch die Hülfskalotte den ihren in halber Höhe. In Fig. 226 hat man also nur D_1C_1 zu halbieren, um S zu finden.

Fig. 226.



Nun ist aus Ähnlichkeitgründen $MD_1 = \frac{3}{4}MD = \frac{3}{4}(r - h)$, wo h die Pfeilhöhe der Kalotte ist, also $D_1C_1 = \frac{3}{4}r - \frac{3}{4}(r-h) = \frac{3}{4}h$, folglich

$$D_1S = \frac{1}{2}D_1C_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}h = \frac{3}{8}h,$$

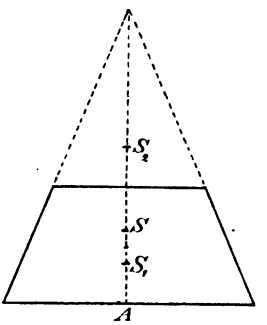
folglich

$$MS = \tfrac{3}{4}(r-h) + \tfrac{3}{8}h = \tfrac{3}{8}[2r - 2h + h] = \tfrac{3}{8}(2r - h).$$

Anwendung auf die Halbkugel. Für $h = r$ geht der Sektor in die Halbkugel über, für diese folgt also $MS = \frac{3}{8}(2r - r) = \frac{3}{8}r$. Die Wiederholung der vorigen Berechnungsart fällt für diese ganz einfach aus.

308) Stumpfe der Körper zweiter Ordnung. Einige solche sind in Fig. 224 angedeutet. Kann man die Berechnung für den Kegelstumpf durchführen, so ist sie für alle andern Formen erledigt.

Fig. 227.



In Fig. 227 seien die Radien r und ϱ, die Stumpfhöhe h. Der ergänzte Kegel hat die Höhe $y = \frac{hr}{r-\varrho}$, wie eine einfache Betrachtung ergiebt, also liegt der Schwerpunkt S_2 des Ergänzungskegels in der Höhe

$$h + \frac{y-h}{4} = \frac{3h+y}{4},$$

der des ganzen Kegels in der Höhe $\frac{y}{4}$. Nach dem Satze von den statischen Momenten ist

$AS_1 \cdot$ Stumpf $+ AS_2 \cdot$ Ergänzungskegel $= SA \cdot$ ganzer Kegel, oder

$$h_s\left[\frac{\pi h}{3}(r^2 + r\varrho + \varrho^2)\right] + \frac{3h+y}{4}\left(\varrho^2\pi\,\frac{y-h}{3}\right) = \frac{y}{4}\left(r^2\pi\,\frac{y}{3}\right).$$

Setzt man $\frac{hr}{r-\varrho}$ für y ein, so ergiebt sich schliefslich

$$h_s = \frac{h}{4}\,\frac{r^2 + 2r\varrho + 3\varrho^2}{r^2 + r\varrho + \varrho^2}.$$

Multipliziert man oben und unten jedes Glied mit π, so erhält man

$$h_s = \frac{h}{4}\,\frac{r^2\pi + 2\sqrt{r^2\pi\varrho^2\pi} + 3\varrho^2\pi}{r^2\pi + \sqrt{r^2\pi\varrho^2\pi} + \varrho^2\pi} = \frac{h}{4}\,\frac{G_1 + 2\sqrt{G_1 G_2} + 3G_2}{G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2},$$

wo G_1 die untere, G_2 die obere Fläche ist, wobei gleichgültig ist, welche von beiden als die gröfsere angenommen wird.

Diese letzte Formel gilt nun für sämtliche Stumpfe dieser Gruppe.

309) Nach Nr. 164 läfst sich für die Querschnittsformel $q_y = cy^2$ im Anschlufs an die Figur 224, auf deren Grundfläche die Abstände h_1 und h_2 zu beziehen sind, die Schwerpunktshöhe folgendermafsen berechnen:

$$h_s = \frac{M}{J} = \frac{\frac{ch_2^4}{4} - \frac{ch_1^4}{4}}{\frac{ch_2^3}{3} - \frac{ch_1^3}{3}} = \frac{3}{4}\frac{h_2^4 - h_1^4}{h_2^3 - h_1^3},$$

was noch durch $h_2 - h_1$ gekürzt werden könnte, wodurch jedoch die Formel an Einfachheit verliert.

Dafs sich auch die Simpsonsche Regel anwenden läfst, ergiebt aus den nachstehenden allgemeinen Betrachtungen.

310) Körper gemischter Ordnung bis zum zweiten Grade. Hierher gehören die Kugel, der Kugelabschnitt und die Kugelschicht, das Drehungsellipsoid mit Abschnitt und Schicht, das dreiachsige Ellipsoid mit Abschnitt und Schicht, das einmantelige und zweimantelige Drehungsellipsoid (letzteres auch mit seinen Schichten), das ein- und zweimantelige dreiachsige Hyperboloid, das hyperbolische Paraboloid, sämtliche Prismatoide mit ebenen oder windschiefen Seitenflächen. Dafs dies der Fall ist, soll für jedes Beispiel nachgewiesen werden.

311) a) Berechnung mit Hülfe der Schichtenformel. Ist der Querschnitt von der Form

$$q_y = a + by + cy^2,$$

so liegt nach Nr. 178 der Schwerpunkt in der Höhe

$$y_s = \frac{\frac{ay^2}{2} + \frac{by^3}{3} + \frac{cy^4}{4}}{\frac{ay^2}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3}}.$$

Hier könnte noch durch y gekürzt werden, jedoch verliert die Formel dadurch an Übersichtlichkeit.

312) b) Berechnung mit Hülfe der Simpsonschen Regel. Ist der Querschnitt von der Form

$$q_y = a + by + cy^2,$$

so ist sein statisches Moment in Bezug auf die Grundfläche

$$m_y = ay + by^2 + cy^3.$$

Da nun der dritte Grad nicht überstiegen ist, kann sowohl der Inhalt, als auch das statische Moment nach der Simpsonschen Regel berechnet werden.

Der Inhalt wird

$$J = \frac{h}{6}(U + O + 4M),$$

wo U den Unterschnitt, O den Oberschnitt, M den Mittelschnitt bedeutet. Das statische Moment wird

$$M_1 = \frac{h}{6}(U' + O' + 4M'),$$

wo U' das statische Moment des Unterschnittes, O' das des Oberschnittes, M' das des Mittelschnittes in bezug auf die Grundfläche bedeutet.

Demnach wird die Schwerpunktshöhe

$$h_s = \frac{M_1}{J} = \frac{U' + O' + 4M'}{U + O + 4M}.$$

Nun ist aber $U' = U \cdot 0 = 0$, $O' = O \cdot h$, $M' = M \cdot \frac{h}{2}$, also wird der Zähler gleich $Oh + 4M\frac{h}{2} = h(O + 2M)$. Demnach folgt

$$h_s = h\,\frac{O + 2M}{U + O + 4M}.$$

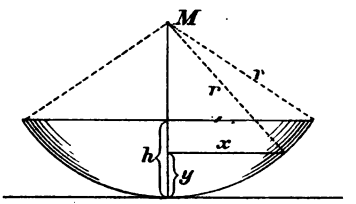
Im allgemeinen ist die Summenformel vorzuziehen, weil man bei ihr den Mittelschnitt nicht besonders zu berechnen braucht. In vielen Fällen aber wird die Simpsonsche Regel dadurch besonders einfach, dafs einzelnes ganz wegfällt.

313) Beispiel des Kugelabschnitts.

Aus $x^2 = r^2 - (r - y)^2 = 2ry - y^2$ folgt als Querschnittsfläche

$$q_y = x^2\pi = 2r\pi y - \pi y^2.$$

Fig. 228.



Hat also das Kugelsegment die Höhe h, so folgt als Schwerpunktshöhe

$$y_s = \frac{M}{J} = \frac{2r\pi\frac{h^3}{3} - \pi\frac{h^4}{4}}{2r\pi\frac{h^2}{2} - \pi\frac{h^3}{3}} = \frac{h}{4} \cdot \frac{8r - 3h}{3r - h}.$$

(Für $h = r$ ergiebt sich $\frac{5}{8}r$ als Schwerpunktshöhe der Halbkugel.) Die Simpsonsche Regel ist hier unbequemer, als die Summenformel. Man wende sie trotzdem zur Übung an.

314) Beispiel der Kugelschicht.

a) Sind h_2, h_1 und r gegeben, so ist nach dem Vorigen in Bezug auf die Grundfläche

$$J_2 - J_1 = \left(2r\pi\frac{h_2^2}{2} - \pi\frac{h_2^3}{3}\right) - \left(2r\pi\frac{h_1^2}{2} - \pi\frac{h_1^3}{3}\right),$$

$$M_2 - M_1 = \left(2r\pi\frac{h_2^3}{3} - \pi\frac{h_2^4}{4}\right) - \left(2r\pi\frac{h_1^3}{3} - \pi\frac{h_1^4}{4}\right),$$

folglich

$$y_s = \frac{M_2 - M_1}{J_2 - J_1} = \frac{\frac{2r\pi}{3}\left(h_2^3 - h_1^3\right) - \frac{\pi}{4}\left(h_2^4 - h_1^4\right)}{\frac{2r\pi}{2}\left(h_2^2 - h_1^2\right) - \frac{\pi}{3}\left(h_2^3 - h_1^3\right)}$$

$$= \frac{8r\left(h_2^3 - h_1^3\right) - 3\left(h_2^4 - h_1^4\right)}{12r\left(h_2^2 - h_1^2\right) - 4\left(h_2^3 - h_1^3\right)}.$$

Hier könnte noch mittels $(h_2 - h_1)$ gekürzt werden, was aber die Formel nicht vereinfachen würde.

Fig. 229.

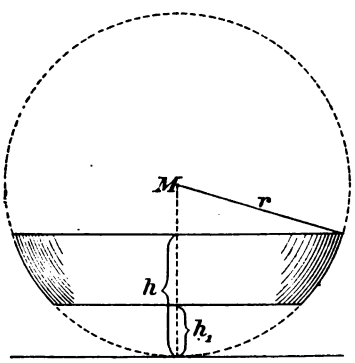
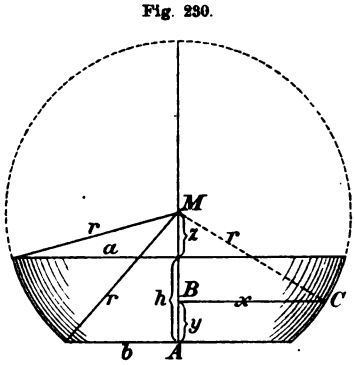


Fig. 230.



b) Sind jedoch die meſsbaren Radien a und b und die Schichthöhe h gegeben, so kann man folgendermaſsen verfahren.

Aus $r^2 = a^2 + z^2$ und $r^2 = b^2 + (h + z)^2$ folgt

$$a^2 + z^2 = b^2 + h^2 + 2hz + z^2,$$

also

$$z = \frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h}.$$

Jetzt ist

$$x^2 = r^2 - MB^2 = a^2 + z^2 - (z + h - y)^2$$

$$= (a^2 - h^2 - 2hz) + 2(z + h)y - y^2,*)$$

also

$$q_y = x^2\pi = \pi\left[(a^2 - h^2 - 2hz) + 2(z + h)y - y^2\right],$$

*) Dies ist die Gleichung des Kreises in Bezug auf A als Nullpunkt des Koordinatensystems.

folglich

$$\overset{h}{\underset{0}{J}} = \pi\left[(a^2 - h^2 - 2h)\frac{h}{1} + 2(z+h)\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3}\right] = \pi h\left[a^2 - zh - \frac{h^2}{3}\right].$$

Setzt man hier den Wert von z ein, so erhält man

$$J = \frac{\pi h}{6}[3a^2 + 3b^2 + h^2].$$

Dagegen wird

$$\overset{h}{\underset{0}{M}} = \pi\left[(a^2 - h^2 - 2h)\frac{h^2}{2} + 2(z+h)\frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4}\right] = \frac{\pi h^2}{12}[6a^2 - 4hz - h^2],$$

Einsetzung des Wertes von z giebt

$$M = \frac{\pi h^2}{12}[4a^2 + 2b^2 + h^2].$$

Endlich folgt

$$y_s = \frac{M}{J} = \frac{h}{2} \cdot \frac{4a^2 + 2b^2 + h^2}{3a^2 + 3b^2 + h^2}.$$

Setzt man $b = 0$, so erhält man eine neue Formel für das Segment, nämlich

$$y_s = \frac{h}{2} \cdot \frac{4a^2 + h^2}{3a^2 + h^2},$$

die der früheren vorzuziehen ist, weil sie nur meſsbare Stücke enthält. Setzt man oben $a = 0$, so folgt

$$y_s = \frac{h}{2} \cdot \frac{2b^2 + h^2}{3b^2 + h^2}$$

als Schwerpunktsabstand des Segments von seiner Grundfläche. Die vorangehende Formel gab den vom Scheitelpunkte aus gemessenen Abstand.

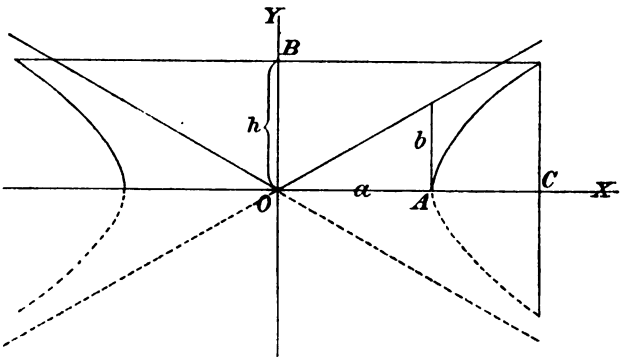
315) Damit sind zugleich die Schichten der nach Cavalieri aus der Kugel abzuleitenden Körper erledigt, z. B. der des Drehungsellipsoids, des dreiachsigen Ellipsoids und der aus der Halbkugel abzuleitenden Gewölbe. Bei den Ellipsoiden kann man selbstverständlich auch von der Ellipsengleichung ausgehen, ähnlich wie es nachstehend für das Hyperboloid geschehen soll.

316) Beispiel des einmanteligen Drehungshyperboloids.
a) Berechnung mit Hülfe der Schichtenformel.
Die Gleichung der Hyperbel sei

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Durch Drehung um die Y-Achse entsteht ein einmanteliges Drehungshyperboloid.

Fig. 231.



Aus der Gleichung folgt

$$x^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 ,$$

so dafs der Querschnitt des Körpers in der Höhe y wird

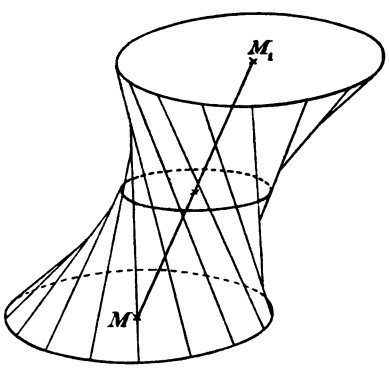
$$q_y = x^2\pi = a^2\pi + \frac{a^2\pi}{b^2} y^2 .$$

Die Schwerpunktshöhe wird also nach Nr. 174 für den von 0 bis h reichenden Körper

$$y_s = \frac{a^2\pi \frac{h^2}{2} + \frac{a^2\pi}{b^2}\frac{h^4}{4}}{a^2\pi \frac{h}{1} + \frac{a^2\pi}{b^2}\frac{h^3}{3}} = \frac{3h}{4} \cdot \frac{2b^2 + h^2}{3b^2 + h^2} ,$$

was nur von h und b_1, nicht aber von a abhängig ist.

Fig. 232.



Ist z. B. $b = 1$ und $h = 2$, so folgt $y_s = \frac{9}{7}$.

Alle nach Cavalieri daraus abzuleitenden Körper, auch die durch Affinität (schräges Koordinatensystem) damit zusammenhängenden, werden ebenso behandelt, z. B. der in Fig. 232 dargestellte.

b) Berechnung mit Hülfe der Simpsonschen Regel.

Aus der Gleichung

$$q_y = a^2\pi + \frac{a^2\pi}{b^2} y^2$$

folgt als Oberschnitt

$$O = a^2\pi + \frac{a^2\pi}{b^2} h^2,$$

als Mittelschnitt

$$M = a^2\pi + \frac{a^2\pi}{b^2} \left(\frac{h}{2}\right)^2,$$

während der Unterschnitt $U = a^2\pi$ ist.

Dies ist nach Nr. 312 in die Formel

$$h_s = h \frac{O + 2M}{U + O + 4M}$$

einzusetzen und giebt

$$h_s = h \frac{\left(a^2\pi + \frac{a^2\pi}{b^2} h^2\right) + 2\left(a^2\pi + \frac{a^2\pi}{b^2} \frac{h^2}{4}\right)}{a^2\pi + \left(a^2\pi + \frac{a^2\pi}{b^2} h^2\right) + 4\left(a^2\pi + \frac{a^2\pi}{b^2} \frac{h^2}{4}\right)} = \frac{3h}{4} \frac{2b^2 + h^2}{3b^2 + h^2},$$

was mit dem obigen Resultate übereinstimmt. Die Schichtenformel war offenbar vorzuziehen.

317) Das zweimantelige Hyperboloid. Die Gleichung der Hyperbel sei zunächst dieselbe wie vorher, nur geschehe die Drehung um die X-Achse. Um die Schichtenformel anzuwenden, verlege man den Koordinatenanfang nach A, so dafs man statt x zu schreiben hat $(x + a)$, während y unverändert bleibt. Die Gleichung geht dadurch über in

$$\frac{(x + a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder in

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2,$$

so dafs der senkrechte Querschnitt des Drehungskörpers in der Entfernung x von A wird

$$q_x = y^2\pi = \frac{2b^2\pi}{a} x + \frac{b^2\pi}{a^2} x^2.$$

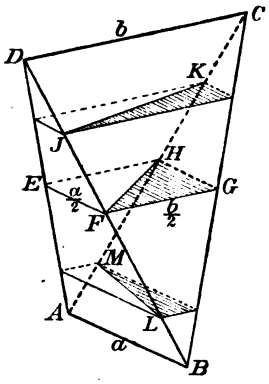
Für den von A bis x_1 (bei C) reichenden Körper wird der von A aus gerechnete Schwerpunktsabstand

$$x_s = \frac{\frac{2b^2\pi}{a} \frac{x_1^3}{3} + \frac{b^2\pi}{a^2} \frac{x_1^4}{4}}{\frac{2b^2\pi}{a} \frac{x_1^2}{2} + \frac{b^2\pi}{a^2} \frac{x_1^3}{3}} = \frac{x_1}{4} \cdot \frac{8a + 3x_1}{3a + x_1}.$$

Ist z. B. $AC = x_1 = 1$ und $a = 1$, so folgt $x_s = \frac{1}{4} \cdot \frac{8+3}{3+1} = \frac{11}{16}$. Der für x_s gefundene Ausdruck ist von b unabhängig. — Aus beiden

Arten von Hyperboloiden lassen sich auch Gestalten ableiten, deren Querschnitte ähnliche Polygone sind, z. B. hyperbolische Gewölbe.

Fig. 233.



318) Prismatoid. Im Method. Lehrbuch, Bd. II, Stereometrie 37 bis 39, sind die allgemeinsten Prismatoide mit ebenen und windschiefen Seitenflächen behandelt, und zwar mit Hülfe des sog. Halbtetraeders.

Führt man in Fig. 233 einen Horizontalschnitt in der Höhe y, so entsteht ein Parallelogramm, dessen Winkel durch den Kreuzungswinkel der beiden Horizontalen a und b bestimmt werden. Die Parallelogrammseiten b_1 und a_1 ergeben sich aus ähnlichen Dreiecken mit Hülfe der Proportionen $y : h = b_1 : b$ und $(h - y) : h = a_1 : a$ als $b_1 = y\frac{b}{h}$ und $a_1 = a - \frac{a}{h}y$, so dafs die Schnittfläche wird

$$q_y = a_1 b_1 \sin\gamma = \left(a - \frac{a}{h}y\right)\frac{b}{h}y \sin\gamma = \frac{ab\sin\gamma}{h}y - \frac{ab\sin\gamma}{h^2}y^2.$$

Die schraffierte Fläche des Halbtetraeders wird halb so grofs, sein Inhalt von der Höhe 0 bis zur Höhe y_1 wird

$$J = \frac{ab\sin\gamma}{2h}\left[\frac{y_1^2}{2} - \frac{1}{h}\frac{y_1^3}{3}\right],$$

das statische Moment des bis dahin reichenden Körpers in Bezug auf die Grundfläche wird

$$M = \frac{ab\sin\gamma}{2h}\left[\frac{y_1^3}{3} - \frac{1}{h}\frac{y_1^4}{4}\right],$$

die entsprechende Schwerpunktshöhe also

$$y_s = \frac{\frac{y_1^3}{3} - \frac{y_1^4}{4h}}{\frac{y_1^2}{2} - \frac{y_1^3}{3h}} = \frac{y_1}{2}\cdot\frac{4h - 3y_1}{3h - 2y_1}.$$

Ebenso konnte die Simpsonsche Regel angewandt werden, da q_y den zweiten Grad nicht überschreitet. Setzt man $y_1 = h$, so erhält man $y_s = \frac{h}{2}$.

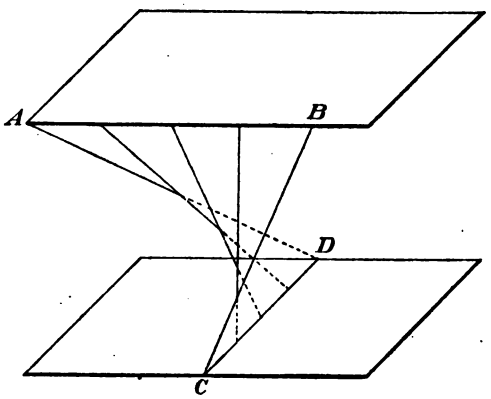
319) Die windschiefe Fläche des Halbtetraeders ist ein hyperbolisches Paraboloid, über welches man Method. Lehrbuch, Band III,

Kegelschnittflächen Nr. 42 vergleiche. In Fig. 234 hat man nur BD zu ziehen, um den Raum des Halbtetraeders zu begrenzen.

Der ganze Raum wird

$$J = \frac{ab \sin\gamma}{2h}\left[\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3h}\right]$$
$$= \frac{ab \sin\gamma\, h}{12}.$$

Fig. 234.

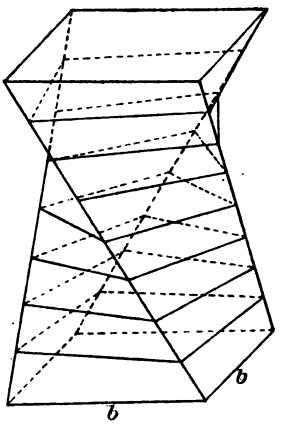


Sein Schwerpunkt liegt in halber Höhe. Die Schicht von beliebiger Höhe y_1 bestimmt sich nach den obigen Formeln.

Damit sind sämtliche Flächen zweiten Grades im wesentlichen erledigt.

320) Fig. 235 stellt ein besonderes Prismatoid mit windschiefen Seitenflächen dar. Im Method. Lehrbuche II, Stereometrie 40, ist es behandelt worden. Man braucht nur einen Eckpunkt der Grundfläche mit dem drüber liegenden der oberen Fläche zu verbinden, um zu erkennen, dafs aus dem prismatischen Körper vier Halbtetraeder ausgeschnitten worden sind. Ganz Entsprechendes geschieht bei dem Prismatoid mit zwei verschiedenen, ganz beliebig gestalteten Grundflächen. Aus dem Prismatoid mit ebenen Seitenflächen sind Halbtetraeder in beliebiger Zahl ausgeschnitten.

Fig. 235.



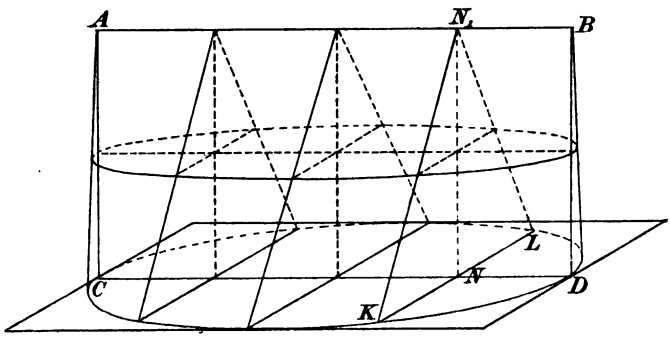
Daraus folgt, dafs die Querschnittsformel der Prismatoide den zweiten Grad nicht übersteigt, dafs also Inhalt und statisches Moment mit Hülfe der Simpsonschen Regel und ebenso mit Hülfe der Summenformel bestimmt werden können.

Die einmanteligen Hyperboloide sind als Prismatoide zu betrachten, deren Grundflächen regelmäfsige Polygone mit unendlich vielen Seiten oder entsprechende elliptische Polygone sind.

321) Zu den Prismatoiden gehören noch Formen, die man sich in beliebiger Zahl darstellen kann.

Ein Beispiel sei hier angegeben. Fig. 236 stellt einen Körper dar, dessen untere Grundfläche ein Kreis ist, während die obere Grundfläche durch eine Gerade AB dargestellt wird, deren Projektion der

Fig. 236.



Kreisdurchmesser CD ist. Die senkrecht zu CD stehenden Sehnen, z. B. KL, sind mit der oberen Projektion (z. B. N_1) ihres Halbierungspunktes N verbunden, so dafs Dreiecke wie KLN_1 entstehen. Die Schenkel dieser Dreiecke bilden eine krumme Fläche. Der Querschnitt in halber Höhe wird eine Ellipse, deren Inhalt die Hälfte vom Kreisinhalte ist.

Auch dieser Körper ist als Prismatoid zu betrachten, kann also nach der Simpsonschen Regel berechnet werden. Sein Inhalt ist

$$J = \frac{h}{6}\left(r^2\pi + 0 + 4\frac{r^2\pi}{2}\right) = \frac{r^2\pi h}{2},$$

also gleich der Hälfte des zugehörigen Cylinders, wie auch aus dem Vergleich der Dreiecke mit den zugehörigen Rechtecken des Cylinders folgt. Das statische Moment in Bezug auf die Grundfläche ist

$$M = \frac{h}{6}\left[r^2\pi \cdot 0 + 0 \cdot h + 4\,\frac{r^2\pi}{2} \cdot \frac{h}{2}\right] = \frac{h^2}{3} r^2\pi,$$

die Schwerpunktshöhe also

$$h_s = \frac{M}{J} = \frac{2}{3}h,$$

wie auch sofort aus den Schwerpunkten der Dreiecksschnitte geschlossen werden kann.

Jeder Horizontalschnitt des Körpers ist eine Ellipse, die Ellipsen gehen nach oben hin aus der Kreisgestalt allmählich in die der Geraden über. Der Körper kann, wie der Kegel, nach oben hin fortgesetzt werden, ebenso nach unten.

322) Durch Horizontalverschiebung der Querschnitte erhält man den in Affinitätsbeziehung zum vorigen stehenden Schrägkörper.

Eine andere Transformation erhält man, wenn man statt der parallelen Schnittebenen (Dreiecke) solche nimmt, die (z. B. oberhalb AB) sich in einer Kante schneiden, die senkrecht zur Zeichnungsebene steht. Dadurch erhält man einen Körper, bei dem die Schneide $AB < CD$ ist, während der Parallelismus erhalten bleibt. Auch jetzt sind sämtliche Horizontalschnitte Ellipsen, denn jede Ellipse ist einer Centralprojektion unterworfen worden.

Eine weitere Umgestaltung erzielt man durch Drehung jedes Querschnittes in seiner Ebene, z. B. um den Mittelpunkt.

An diesem Beispiele erkennt man, welche grofse Mannigfaltigkeit im Gebiete der Prismatoide zu finden ist. Eine grofse Anzahl solcher Körper sind in der „Genetischen Stereometrie“ von Heinze-Lucke (Leipzig, bei Teubner, 1886) behandelt worden. Die Schwerpunkte sämtlicher sind der elementaren Bestimmung mit Hülfe der Summenformel und der Simpsonschen Regel zugänglich, weil nirgends der 2. bzw. 3. Grad überstiegen wird.

323) Körper vom Querschnitt

$$q_y = a + by + cy^2 + \cdots + ky^p.$$

Nach Nr. 172 wird

$$J = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \cdots + \frac{kh^{p+1}}{p+1},$$

$$M = \frac{ah^2}{2} + \frac{bh^3}{3} + \frac{ch^4}{4} + \cdots + \frac{kh^{p+2}}{p+2},$$

folglich

$$h_s = \frac{\frac{ah^2}{2} + \frac{bh^3}{3} + \frac{ch^4}{4} + \cdots + \frac{kh^{p+2}}{p+2}}{\frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \cdots + \frac{kh^{p+1}}{p+1}}.$$

Hier könnte noch durch h gekürzt werden, jedoch würde die Formel dadurch an Einfachheit verlieren.

Einige Beispiele sind früher gegeben worden, z. B. in der Tabelle über Parabeln höherer Ordnung.

324) Eine umfangreiche Gruppe von Drehungskörpern. Eine Kurve habe die Gleichung

$$x = a + by + cy^2 + \cdots + ky^p.$$

Durch Drehung um die Y-Achse entsteht ein Drehungskörper, dessen Querschnittsformel $q_y = x^2\pi$ auf die Form

$$q_y = a_1 + b_1 y + c_1 y^2 + \cdots + r_1 y^{2p}$$

gebracht werden kann, so dafs die Schwerpunktshöhe des Körpers wird

$$h_s = \frac{M_u}{J} = \frac{\frac{a_1 h^2}{2} + \frac{b_1 h^3}{3} + \frac{c_1 h^4}{4} + \cdots}{\frac{a_1 h}{1} + \frac{b_1 h^2}{2} + \frac{c_1 h^3}{3} + \cdots}.$$

Nach Nr. 116 ist aber zugleich

$$h_s = \frac{M_{xy}}{J} = \frac{M_{xy}}{M_y}$$

folglich

$$M_{xy} = h_s M_y = \frac{M_u M_y}{J} = \frac{M_u \cdot F\varrho}{2\varrho\pi F} = \frac{M_u}{2\pi}.$$

Darin liegt ein Mittel, für zahlreiche Flächen das Centrifugalmoment in Bezug auf die Koordinatenachsen bequem zu bestimmen.

Entsprechendes gilt von den Kurven, deren Gleichung lautet

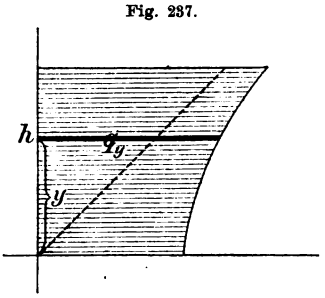
$$x^2 = a + by + cy^2 + \cdots + ky^p.$$

Der letzte Satz kann überhaupt für alle Flächen benutzt werden, bei denen aus irgend welchen Gründen (z. B. Symmetrie) die Schwerpunktshöhe des Drehungskörpers leicht bestimmt werden kann.

325) Beispiel der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$.

Für den gezeichneten Quadranten ist das Centrifugalmoment mit Hülfe des Drehungskörpers folgendermafsen zu bestimmen. Moment des Streifens

Fig. 237.



$$m_u = y \cdot q_y = y \cdot x^2\pi = \pi y\,(1 + y^2),$$

also

$$M_u = \frac{\pi h^2}{2} + \frac{\pi h^4}{4} = \frac{\pi h^2}{4}(2 + h^2).$$

Demnach

$$M_{xy} = \frac{M_u}{2\pi} = \frac{h^2}{8}(2 + h^2).$$

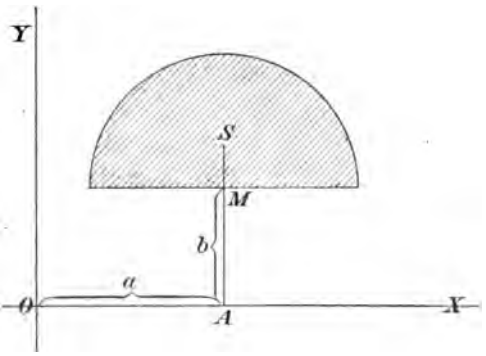
326) Beispiel des Halbkreises in dem Sonderfalle der Fig. 238.

Da die Symmetrieachse parallel der Drehungsachse ist, so ist nach Nr. 117 der Schwerpunkt des Drehungskörpers in der Höhe $b + \frac{4r}{3\pi}$ zu finden. Sein Inhalt ist $\frac{r^2\pi}{2} \cdot 2a\pi = a\pi^2 r^2$, also das Moment $M_u = (a\pi^2 r^2)\left(b + \frac{4r}{3\pi}\right)$, folglich

$$M_{xy} = \frac{a\pi^2 r^3 (3b\pi + 4r)}{2\pi \cdot 3\pi} = \frac{ar^2}{6}(3b\pi + 4r).$$

Im letzteren Falle war die Summenformel für ganze Exponenten nicht ohne weiteres brauchbar, denn die Kreisgleichung $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ führt auf $x = a + \sqrt{r^2 - (y-b)^2}$, wobei rechts erst nach Potenzen von y in unendlicher Reihe entwickelt werden müfste.

Fig. 238.



Der gewonnene Satz über das Centrifugalmoment sagt nichts Neues, bietet aber doch für viele Flächen einen bequemen Weg zur Berechnung. Er gilt auch für die Fälle, wo x oder x^2 durch eine unendliche Reihe gegeben ist, sobald man nur im Konvergenzgebiete bleibt.

327) Negative und gebrochene Exponenten. Ist die Querschnittsgleichung von der Form

$$x = q_y = ay^\alpha + by^\beta + cy^\gamma + dy^\delta + \cdots,$$

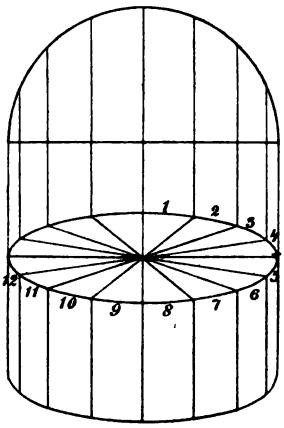
wobei unter den Exponenten auch negative und gebrochene sind, so ist nach Abschnitt V. C (Nr. 179 bis 195) zu verfahren. Tritt in der Querschnittsformel für den Körper oder für sein statisches Moment der Exponent -1 auf, der als Ausnahmefall zu betrachten ist und auf den natürlichen Logarithmus führt, so ist einige Vorsicht nötig, denn der unendlich werdende Streifen darf nicht zu der Fläche gehören, die untersucht werden soll. Sind sämtliche Exponenten gröfser als -1, so kann der Körper von Null bis zu jeder beliebigen endlichen Höhe y berechnet werden. Kommen Exponenten vor, die kleiner als -1 sind, so darf nicht von Null ausgegangen werden, da dann der entsprechende Diagrammteil im allgemeinen unendlich grofs wird. Dagegen kann die Fläche zwischen einem endlichen y_1 und einem endlichen y_2 berechnet werden.

328) Irrationale und transcendente Querschnittsgleichungen können insoweit berücksichtigt werden, als die Entwickelung von q_y in unendliche Reihen möglich ist. Auch hierüber ist schon vorher, z. B. in Nr. 195, das Nötige mitgetheilt, jedoch kann auch der entsprechende Abschnitt in Band III des Method. Lehrbuchs verglichen werden. Bei der Anwendung der Summenformel erhält man Reihen, die man entweder zu geschlossenen Ausdrücken

summieren kann, wovon in Nr. 195 einige Beispiele vorkommen, oder bei denen man auf eine geschlossene Summierung verzichten muſs. Im letzteren Falle erhält man Annäherungsresultate, indem man eine hinreichende Anzahl von Reihengliedern summiert.

329) Sektoren allgemeiner Drehungskörper. Ist die Y-Achse die Drehungsachse für eine Fläche, so liegt nach Nr. 116 der Schwerpunkt jedes Sektors des entstehenden Drehungskörpers in der Höhe

Fig. 239.



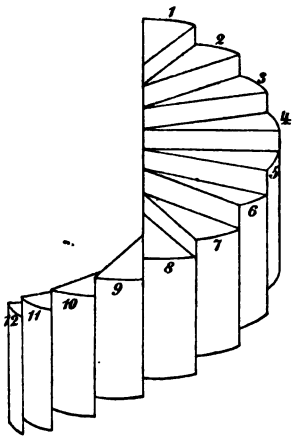
$$y = \frac{M_{xy}}{M_y},$$

wo M_{xy} das Centrifugalmoment der Fläche in Bezug auf die Koordinatenachsen, M_y ihr statisches Moment in Bezug auf die Y-Achse ist. Im übrigen ist (nach Nr. 47—50) der Schwerpunkt desjenigen Kreisbogens zu bestimmen, dessen Radius

$$e = \frac{T_y}{M_y}$$

ist und dessen Centriwinkel der des Sektors ist. Nach Nr. 9 ergiebt sich als Abstand

Fig. 240.



$$\varrho = \frac{es}{b} \text{ bezw. } \varrho = \frac{2e^2 \sin\frac{\alpha}{2}}{b},$$

wo $\alpha = \frac{b}{e\pi} 180^0$ ist.

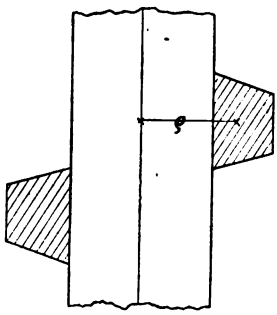
Die Beispiele aus Nr. 49) und 50) mögen genügen.

330) Körperliche Schraubengewinde. Im Method. Lehrbuche, Teil III, Stereometrie, ist an Fig. 91 gezeigt, daſs der Inhalt der körperlichen Schraubengewinde ohne weiteres nach der Guldinschen Regel berechnet werden kann, da die einzelnen Sektoren des Drehungskörpers nur in ihrer Lage verschoben sind, was den Inhalt nicht ändert. (Dies entspricht ganz der Flächenverschiebung beim Cavalierischen Prinzip).

Für einen vollen Umgang findet man also nach Nr. 116 den Schwerpunkt folgendermaſsen. In der erzeugenden Fläche bestimme man den Punkt mit den Koordinaten $y = \frac{M_{xy}}{M_y}$, $x = \frac{T_y}{M_y}$. In der durch diesen

Punkt gehenden Schraubenlinie liegen die Schwerpunkte aller unendlich kleinen Sektoren. Der Schwerpunkt dieser Schraubenlinie ist zu suchen. Er liegt in halber Höhe. Seine Entfernung von der Achse stimmt überein mit der des Schwerpunktes für den Kreisbogen, in den sich diese Schraubenlinie projizieren läfst, wobei übrigens $\alpha > 360^0$ sein kann.

Fig. 241.

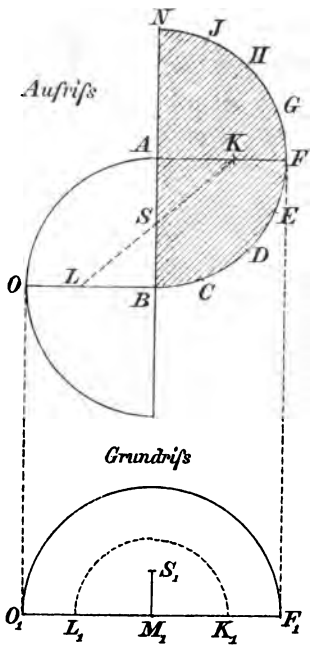


Der Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens ergiebt sich ebenfalls aus dem Prinzip von Cavalieri.

Als Beispiel behandle man nach Art von Nr. 165 das in der Figur angedeutete Trapezgewinde.

331) **Aufgabe.** Ein Schraubengewinde entstehe durch Drehung eines Halbkreises um eine unendlich dünne Spindel und zwar so, wie es Fig. 242 darstellt. Er soll im Aufrifs genau konstruiert werden, z. B. mit Hülfe der durch die Punkte C, D, E, F, G, H, J gehenden Schraubenlinien.

Fig. 242.



Der Inhalt und der Schwerpunkt sollen für einen halben Umgang bestimmt werden.

Das Ausführen der Zeichnung wird dem Leser überlassen. Der Inhalt wird gleich dem der Halbkugel, also $J = \frac{2}{3} r^3 \pi$. Der Schwerpunkt liegt in der Höhe von S. Der Punkt K, durch den die Hülfsschraubenlinie geht, hat nach Nr. 50 den Abstand $AK = \frac{3\pi}{16} r$, demnach ist im Grundrifs die Schwerpunktsentfernung $M_1 S_1 = \frac{2AK}{\pi} = \frac{3}{8} r$, was dem Schwerpunkte der Halbkugel entspricht.

Für einen beliebigen Umdrehungswinkel findet man die Lösung

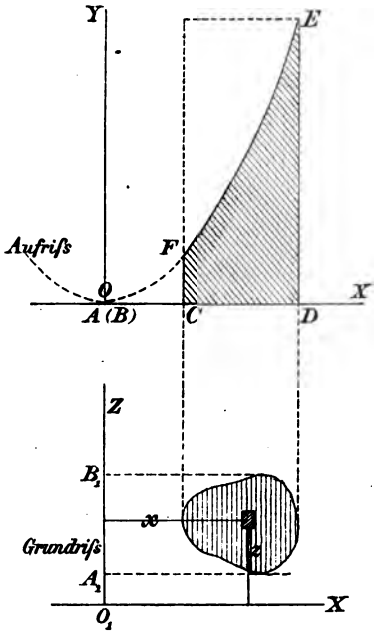
$$M_1 S_1 = \frac{135}{2} \frac{r \sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha}$$

ebenso, wie in Nr. 50.

332) Andeutung über parabolisch abgeschnittene Prismen und Cylinder.

Fig. 243 stelle ein Prisma bezw. einen Cylinder in Grund- und Aufriſs dar. Derselbe ist durch einen parabolischen Cylinder 2. Ordnung abgeschnitten, der die Grundriſsebene in der Geraden $A_1 B_1$ berührt. Wie groſs ist der Inhalt des Körpers und wo liegt sein Schwerpunkt?

Fig. 243.



Auflösung. Ist die Parabelgleichung $y = x^2$, so steht über jedem Flächenteilchen F des Grundrisses eine Säule vom Inhalte fx^2. Der gesamte Körperinhalt ist also

$$J = \sum fx^2 = T_z,$$

d. h. gleich dem Trägheitsmomente der Grundriſsfläche in Bezug auf die Z-Achse des Grundrisses.

Das statische Moment jeder kleinen Säule in Bezug auf die Z-Achse ist gleich $x \cdot fx^2 = fx^3$, also ist das des Körpers

$$M_z = \sum fx^3,$$

so das es sich um ein Flächenmoment dritter Ordnung handelt. Da zugleich $M_z = x_s \cdot J$ ist, so folgt als die eine Koordinate des Körperschwerpunktes

$$x_s = \frac{M_z}{J} = \frac{\sum fx^3}{\sum fx^2}.$$

Das statische Moment jeder Säule fx^2 in Bezug auf die X-Achse im Grundriſs ist $zfx^2 = fx^2 z$. Das des gesamten Körpers ist

$$M_x = \sum fx^2 z.$$

Demnach ist die zweite Schwerpunktskoordinate

$$z_s = \frac{M_x}{J} = \frac{\sum fx^2 z}{\sum fx^2}.$$

Die Schwerpunktshöhe y_s wird folgendermaſsen gefunden. In Bezug auf die Grundfläche hat jedes Säulchen fx^2 das statische Moment $\frac{y}{2} fx^2$ oder $\frac{x^2}{2} fx^2$, oder endlich $\frac{1}{2} fx^4$. Das Gesamtmoment in Bezug auf die Grundfläche ist also $\frac{1}{2} \sum fx^4$, also die Schwerpunktshöhe

$$y_s = \frac{\frac{1}{2}\sum fx^4}{\sum fx^2}.$$

Ahnlich ist es bei der Parabel $y = cx^2$.

Bei der Parabel $y = x^p$ handelt es sich um die Ausdrücke

$$\sum fx^p, \quad \sum fx^{p+1}, \quad \sum fx^p y, \quad \frac{1}{2}\sum fx^{2p}.$$

An diesen Beispielen erkennt man die Bedeutung der Flächenmomente höherer Ordnung.

Das Beispiel des regelrecht aufgestellten Rechteckskörpers, der in solcher Weise abgeschnitten ist, läfst sich an der Hand des Früheren bequem durchführen. Andere Grundrifsformen sind schwerer zu behandeln.

Das Abschneiden kann auch mit Hülfe eines Drehungsparaboloides p^{ter} Ordnung erfolgen, wobei Polarmomente höherer Ordnung auftreten.

Auf diesen Gegenstand, der nur theoretische Bedeutung hat, soll nicht näher eingegangen werden. Er bietet zahlreiche Übungsbeispiele für die höhere Analysis.

333) Anwendungen der Schwerpunktslehre.

a) In der Mechanik spielt der Schwerpunkt von Körpern eine hervorragende Rolle als Angriffspunkt eines Systems paralleler Kräfte, in ihm greift die Resultante der einzelnen Schwerkräfte an, und zwar für alle möglichen Stellungen des Körpers. Die elementare Theorie der einfachen Maschinen ist dort dadurch zu verfeinern, dafs der Einflufs des Gewichtes der einzelnen Teile mit eingerechnet wird. Ein interessantes Beispiel bietet in dieser Hinsicht die Untersuchung über die Empfindlichkeit der Wage. Dabei handelt es sich nicht nur um den statischen, sondern auch um den dynamischen Einflufs.

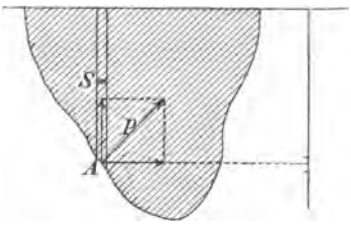
b) Die Stabilität von Mauern, d. h. der Widerstand gegen seitlichen Druck (Winddruck, Wasserdruck, Druck von Erdmassen, Druck von fehlerhaften Dachkonstruktionen, von Gewölben) hängt ab von dem Momente der im Schwerpunkte angreifenden Schwerkraft in Bezug auf die Kippkante der Mauer.

c) Die Untersuchungen über labiles, stabiles und indifferentes Gleichgewicht von sich drehenden, rollenden, schwimmenden Körpern beruhen auf der Schwerpunktstheorie. Die bei dem stabilen Zustande eintretenden Pendelschwingungen und ähnliche Erscheinungen erfordern die Kenntnis derselben Theorie.

d) In den Lehrbüchern der Mechanik werden die Sätze über den Angriffspunkt des Auftriebs bei schwimmenden Körpern

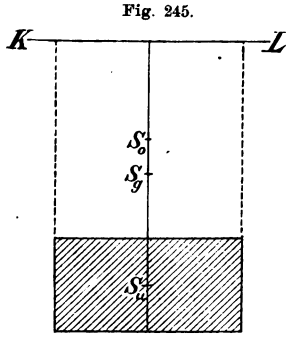
vielfach falsch angegeben, indem der Angriffspunkt in vollem Widerspruch zu den Hebelgesetzen einfach in den Schwerpunkt der verdrängten Wassermasse gelegt wird. Die Korrektur ergiebt sich aus Folgendem: Der Druck p bei der Stelle A in Fig. 244 zerlegt sich in einen Seitendruck und einen Auftrieb. Der erstere ist gleich dem Drucke gegen die entsprechende Wandprojektion des Flächenteilchens, der letztere gleich dem Gewichte der verdrängten Wassersäule. Der Angriffspunkt A liegt aber doppelt so tief, wie der Schwerpunkt der Wassersäule. Da dies für alle Säulchen gilt, so liegt der Angriffspunkt des Auftriebs im Falle der Fig. 244 senkrecht unter dem Schwerpunkte der verdrängten Wassermasse und zwar in doppelter Tiefe. (Darin liegt eine Anwendung des Prinzips von Cavalieri versteckt.)

Fig. 244.



Ist der Körper vollständig untergetaucht, so findet dasselbe statt. Ist nämlich in Fig. 245 S_u der Schwerpunkt der verdrängten Wassermasse, S_o der Schwerpunkt der darüber schwebenden Wassermasse, S_g der Schwerpunkt des Gesamtraums, und sind J_u, J_o und J_g die entsprechenden Räume, so ist in Bezug auf die Niveaufläche KL das gesamte statische Moment gleich der Summe der Einzelmomente, d. h. (wenn die Schwerpunktstiefen mit t_u, t_o und t_g bezeichnet werden)

Fig. 245.



$$J_g t_g = J_o t_o + J_u t_u ,$$

demnach ist die Schwerpunktstiefe der verdrängten Wassermasse

$$1) \qquad t_u = \frac{J_g t_g - J_o t_o}{J_u} .$$

Dies gilt für jede Gestalt und Lage des untergetauchten Körpers, auch kann dabei $S_o S_u$ eine schräge Gerade sein.

Die Auftriebsverhältnisse gestalten sich nun folgendermafsen. Nach unten drückt den Körper die Wassermasse des Raums J_o, nach oben drückt ihn die dem Gesamtraume J_g entsprechende Wassermasse. Die Resultante beider Kräfte ist $J_g - J_o = J_u$. Nun liegt der Angriffspunkt A_o doppelt so tief wie S_o, also in der Tiefe $2\,t_o$; der Angriffspunkt A_g liegt ebenso in der Tiefe $2\,t_g$. Die beiden Kräfte sind entgegengesetzte, der Angriffspunkt bleibt nach bekanntem Satze derselbe,

wenn man die Richtungen der Kräfte ändert, wenn sie nur entgegengesetzte bleiben. In der Fig. 246 sind die Kräfte der Deutlichkeit halber in horizontale Lage gedreht worden. Dort stelle $\overline{A_oB}$ die Kraft J_o, $\overline{A_gC}$ die Kraft J_g vor. Macht man dann $\overline{A_oD} = \overline{A_gC}$ und $\overline{A_gE} = -\overline{A_oB}$, dann giebt DE auf A_oA_g den Schnittpunkt A_u als den Angriffspunkt der Resultante. Dabei mufs nach dem Gesetz der statischen Momente in Bezug auf KL sein

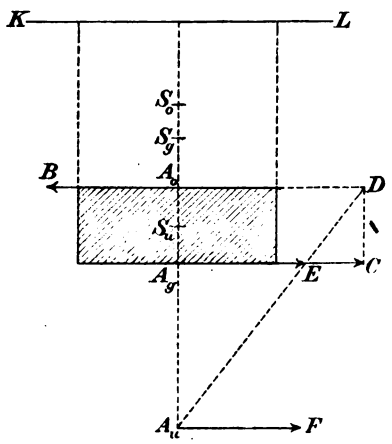
$$J_g \cdot 2\,t_g - J_o \cdot 2\,t_o = J_u \cdot t_u .$$

Demnach ist die Tiefe

$$2) \qquad t_u = \frac{2\,(J_g t_g - J_o t_o)}{J_u},$$

d. h. das Doppelte von der Tiefe des Punktes S_u.

Fig. 246.



(Auf diesen Umstand hat meines Wissens zuerst Herr Ingenieur H. Hädicke in einem Schriftchen vom Jahre 1881 aufmerksam gemacht, welches unter dem Titel „der Angriffspunkt des Auftriebs“ bei Orell und Füssli in Zürich erschienen ist. Die hier gegebene Darlegung ist allerdings einfacher und kürzer.)

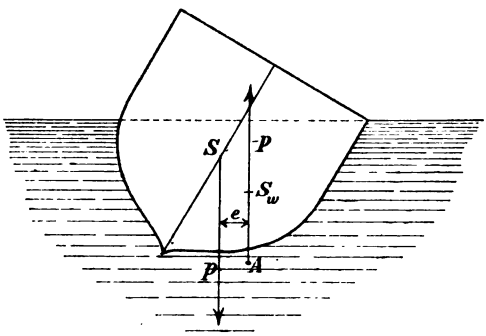
$\overline{A_uF} = J_u$ stellt die Resultante dar. Bringt man sie in A_u entgegengesetzt an, so herrscht zwischen den Kräften $\overline{A_oB}$, $\overline{A_gC}$ und $-\overline{A_uF}$ Gleichgewicht. Die Resultante ist senkrecht nach oben gerichtet zu denken.

Der horizontale Seitendruck gegen den Körper ist in jeder Richtung genommen gleich Null. Er besteht aus zwei gleichen und entgegengesetzten Komponenten, deren Gröfse man folgendermafsen findet. Man projiziere den Körper auf eine senkrechte Wand, die zugleich senkrecht gegen die gewählte Richtung liegt (z. B. auf eine der senkrechten Koordinatenebenen). Der eine Teil des Seitendrucks ist dann gleich dem statischen Momente M_0 der Projektionsfläche in Bezug auf die Wasseroberfläche, der Angriffspunkt liegt in der Tiefe $\frac{T_0}{M_0}$, wo T_0 das Trägheitsmoment, M_0 das statische Moment der Fläche in Bezug auf die Wasseroberfläche ist. Die andere Koordinate wird mittels der Formel $\frac{M_{xy}}{M}$ gefunden, wo M_{xy} das Centrifugalmoment der Projektionsfläche in Bezug auf den Schnitt der Wasserfläche und der senkrechten Koordinatenebene ist. (Vgl. Nr. 113.) Jetzt ist

die Lage und Gröfse der betreffenden Druckresultante genau bestimmt. Die andere ist ihr entgegengesetzt und gleich grofs, die Summe beider also Null. Das Gesagte gilt für jede beliebige Gestalt. Damit ist die Statik untergetauchter Körper erledigt.

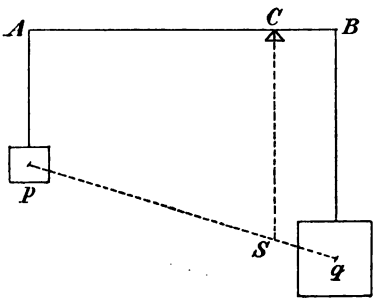
e) Stabilität eines Schiffskörpers in schräger Lage. Ist S der Schwerpunkt des Schiffskörpers, p das gesamte Gewicht des Schiffes, so ist der Auftrieb nach Archimedes gleich $-p$. Ist S_w der Schwerpunkt der verdrängten Wassermasse, so liegt der Angriffspunkt A des Auftriebs doppelt so tief. Das Moment des Kräftepaares ist für diese Lage des Schiffes gleich pe. Da es ein aufrichtendes ist, kann das Schiff noch einen Winddruck vom Momente $-pe$ aushalten, ohne zu kentern.

Fig. 247.



f) Dreht sich ein Körper um eine beliebige Achse, so ist die entstehende Centrifugalkraft gleich der Centrifugalkraft der im Schwerpunkte vereinigt gedachten Masse. Im allgemeinen greift sie aber in einem anderen Punkte an und giebt für jeden Punkt der Achse ein bestimmtes Centrifugalmoment. In der Regel zerlegt man die gesamte Centrifugalwirkung in eine im Schwerpunkte angreifende Kraft und in ein Kräftepaar, dessen Ebene besonders konstruiert werden mufs (vgl. Fig. 101 für den Fall ungleicher Kräfte). Die drei Hauptachsen des Centralellipsoids sind freie Umdrehungsachsen. Das Problem kann also nur mit Hülfe der körperlichen Trägheitsmomente zum Abschlufs gebracht werden. — Über die Centrifugalkraft, die einen um seine Achse drehenden Rotationskörper zerreifsen will, vgl. Nr. 49.

Fig. 248.



g) Wird ein physisches Pendel vom Gewicht p aus der Ruhelage gebracht und hebt sich dabei sein Schwerpunkt um h, so ist die geleistete Arbeit gleich $p \cdot h$. (Läfst man es in die Ruhelage zurückschwingen, so wird der tiefste Punkt mit einer Drehungsgeschwindigkeit passiert, die sich aus

$T\frac{\vartheta^2}{2} = ph$ als $\vartheta = \sqrt{\frac{2ph}{I}}$ berechnen läfst. Die Schwingungsdauer ist $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, wo $l = \frac{T}{M}$ ist.)

h) Ist ein Hebel AB durch Lasten p und q ins Gleichgewicht versetzt und dreht man ihn um C, so bleibt der Schwerpunkt S beider Lasten in derselben Höhe. Entsprechendes gilt vom Gleichgewichtszustande anderer einfacher oder zusammengesetzter Maschinen, z. B. Rad und Welle, alle Arten von Flaschen- und Rollenzügen, schiefe Ebenen, Schraubenmechanismen u. s. w. Hierher gehören Fragen des indifferenten Gleichgewichtes. Dazu gehört eben, dafs bei eintretender Bewegung der Schwerpunkt sein Niveau nicht ändert.

i) Wird ein Körper durch einen Stofs fortgeschleudert, so bewegt sich sein Schwerpunkt in einer Parabel (im allgemeinen Falle in einem Kegelschnitte) und aufserdem finden Drehungsbewegungen statt, die mit Hülfe der Trägheitsmomente zu untersuchen sind. Dies ist ein Fall des sogenannten Schwerpunktprinzips. Zur Lehre vom excentrischen Stofse ist ebenfalls die Kenntnis der körperlichen Trägheitsmomente nötig.

k) Bewegen sich zahlreiche kosmische Massen nur in Folge der gegenseitigen Anziehung, so bleibt der Schwerpunkt des Systems in Ruhe. Wurde vorher jeder Masse ein Stofs gegeben, so bewegt sich der Schwerpunkt des Systems in gerader Linie. Handelt es sich nur um zwei Körper, so bewegt sich der Schwerpunkt in gerader Linie und beide Körper drehen sich in Ellipsen um den Schwerpunkt des Systems (allgemeiner in Kegelschnitten).

l) Dafs in der Theorie der Gewölbe der Körperschwerpunkt eine wichtige Rolle spielt, ist selbstverständlich. Dasselbe gilt noch von vielen anderen Lehren der Mechanik, auf die jetzt nicht eingegangen werden soll. Über die Flächenschwerpunkte sei noch folgendes gesagt:

m) Bei Schiefsversuchen gilt der Schwerpunkt sämtlicher Treffpunkte als mittlerer Treffpunkt. Bei den Untersuchungen über die Abweichung rotierender Langgeschosse wird er zu Grunde gelegt.

n) Soll bei einer Gleichung n^{ten} Grades durch eine Substitution das zweite Glied entfernt werden, so handelt es sich um eine Verlegung des Nullpunktes des Koordinatensystems nach dem Schwerpunkte der Wurzelpunkte, mögen diese nun reell oder imaginär sein. (Die Gleichung darf auch komplexe Koeffizienten haben.)

o) Strömt in n Punkten einer sehr grofsen Platte Elektrizität in den Quantitäten $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ ein, und wird sie in grofser Entfernung abgeleitet, so gehen die Asymptoten der Stromlinien durch den Schwerpunkt der mit dem Gewichte $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ zu belegenden Einströmungspunkte.

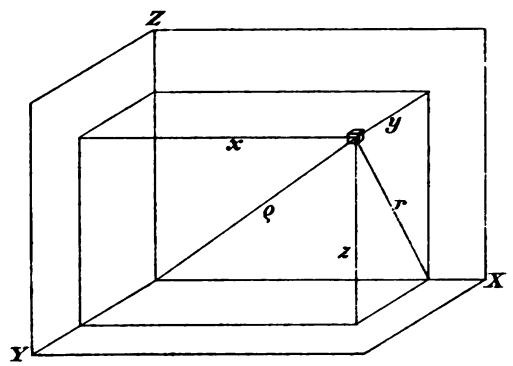
Abschnitt IX.

Die Trägheits- und Centrifugal-Momente der wichtigsten Körper.

A. Allgemeines.

334) Während der vorige Abschnitt die polaren, die axialen und die Plan-Momente erster Ordnung behandelte, sollen hier die entsprechenden Momente zweiter Ordnung abgeleitet werden. Die für die Mechanik wichtigsten sind, wie sich zeigen wird, die axialen, während die Planmomente zur Berechnung der ersteren verwendet werden können.

Fig 249.



335) Begriff des Planmomentes zweiter Ordnung.

Ist m ein kleines Körperteilchen (in der Mechanik ein Massenteilchen), welches von den Koordinatenebenen die Abstände x, y, z hat, so nennt man mx^2, my^2, mz^2 die Planmomente zweiter Ordnung des Massenteilchens in Bezug auf die entsprechenden Koordinatenebenen, die als die Ebene YZ, ZX und XY bezeichnet werden mögen. Handelt es sich um einen Körper, so ist sein Trägheitsmoment eine Summe solcher Ausdrücke, also

$$T_{yz} = \sum mx^2, \quad T_{zx} = \sum my^2, \quad T_{xy} = \sum mz^2.$$

Dabei beziehen sich die Marken der T auf die Ebenen. Die T sind die Planmomente zweiter Ordnung oder die Trägheitsmomente in Bezug auf die drei Grundebenen des Koordinatensystems.

336) Begriff des Axialmomentes zweiter Ordnung.

Ist r der Abstand eines Körperteilchens m von der X-Achse, so ist mr^2 das Axialmoment zweiter Ordnung oder das axiale Trägheitsmoment des Teilchens in Bezug auf diese Achse. Für den ganzen Körper ist

$$T_x = \sum mr^2$$

das axiale Trägheitsmoment oder das Axialmoment zweiter Ordnung für diese Achse.

Da $r^2 = y^2 + z^2$ ist, so folgt $mr^2 = my^2 + mz^2$, also auch

$$\sum mr^2 = \sum my^2 + \sum mz^2,$$

oder

$$T_x = T_{zx} + T_{xy},$$

ebenso ist

$$T_y = T_{xy} + T_{yz}, \quad T_z = T_{yz} + T_{zx}.$$

Also:

Jedes axiale Trägheitsmoment ist gleich der Summe zweier Planmomente zweiter Ordnung in Bezug auf Ebenen, die sich in der Achse des ersten Momentes rechtwinklig schneiden.

337) Begriff des Polarmomentes zweiter Ordnung.

Ist ϱ der Abstand des Körperteilchens m vom Nullpunkte des Koordinatensystems, so ist $m\varrho^2$ sein Polarmoment zweiter Ordnung in Bezug auf diesen Punkt. Für den ganzen Körper ist

$$T_p = \sum m\varrho^2$$

das polare Trägheitsmoment oder das Polarmoment zweiter Ordnung in Bezug auf jenen Punkt.

Nun ist aber $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, folglich auch

$$m\varrho^2 = mx^2 + my^2 + mz^2,$$

ebenso

$$\sum m\varrho^2 = \sum mx^2 + \sum my^2 + \sum mz^2,$$

also

$$T_p = T_{yz} + T_{zx} + T_{xy}.$$

Folglich:

Jedes Polarmoment zweiter Ordnung ist die Summe von drei Planmomenten, deren Ebenen durch den Pol des ersten Momentes gehen und dabei auf einander senkrecht stehen.

Natürlich ist auch

$$T_p = T_{yz} + T_x = T_{zx} + T_y = T_{xy} + T_z,$$

was auch leicht in Worte zu kleiden ist.

338) Verschiebungssatz für das Planmoment zweiter Ordnung.

Handelt es sich um das Planmoment $T_s = \sum mx^2$, wobei die Ebene YZ durch den Schwerpunkt des Körpers gehen soll, und verschiebt man die Ebene parallel zu sich selbst um $\pm e$, so geht der Abstand x über in $x \mp e$, also wird das neue Trägheitsmoment

$$T_1 = \sum m (x \mp e)^2 = \sum mx^2 + \sum me^2 \mp \sum 2mex,$$

oder in

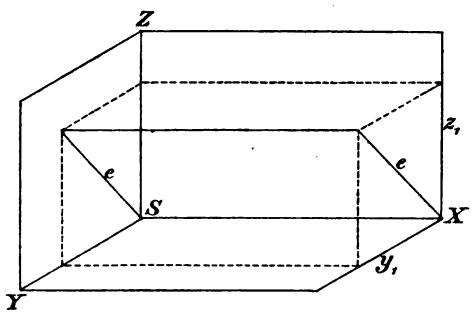
$$T_1 = \sum mx^2 + e^2 \sum m \mp 2e \sum mx.$$

Hier ist $\sum mx^2$ das ursprüngliche Trägheitsmoment T_s, $e^2 \sum m = e^2 J$ das Produkt aus dem Körperinhalte und dem Quadrate der Verschiebungstrecke, $\sum mx$ das statische Moment des Körpers in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende YZ-Ebene, also gleich Null, so dafs man hat

$$T_1 = T_s + e^2 J.$$

Folglich gilt der Satz: Verschiebt man die Ebene des Trägheitsmomentes aus der Schwerpunktslage um $\pm e$, so wächst es um $e^2 J$, d. h. um das Produkt aus dem Körperinhalte und dem Quadrate der Verschiebungsstrecke.

Fig. 250.



339) Verschiebungssatz für das axiale Trägheitsmoment.

Ist T_s das axiale Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Achse, z. B. die X-Achse in Fig. 250 und verschiebt man die Achse um $+e$, so verwandeln sich die Koordinaten y und z in $(y - y_1)$ und $(z - z_1)$, und

$$T_s = \sum my^2 + \sum mz^2 = T_{zx} + T_{xy}$$

geht über in

$$T_1 = \sum m (y - y_1)^2 + \sum m (z - z_1)^2$$

oder in

$$T_1 = \sum my^2 + \sum my_1^2 - \sum 2myy_1 + \sum mz^2 + \sum mz_1^2 - \sum 2mzz_1.$$

Wie im vorigen Abschnitte wird $\sum 2myy_1 = 0$ und $\sum 2mzz_1 = 0$, dagegen

$$\sum my_1^2 = y_1^2 \sum m = y_1^2 J \quad \text{und} \quad \sum mz_1^2 = z_1^2 \sum m = z_1^2 J.$$

Man erhält also

$$T_1 = T_{zx} + y_1^2 J + T_{xy} + z_1^2 J = (T_{zx} + T_{xy}) + J(y_1^2 + z_1^2) = T_s + Je^2.$$

Folglich gilt der Satz: Verschiebt man die Achse eines Trägheitsmomentes aus der Schwerpunktslage um e, so wächst das Trägheitsmoment um das Produkt aus dem Inhalte und dem Quadrate der Verschiebungsstrecke.

340) Der Satz $T_1 = T_s + e^2 J$ gilt auch vom Polarmomente zweiter Ordnung. Der Beweis ergiebt sich ebenso, wie vorher aus

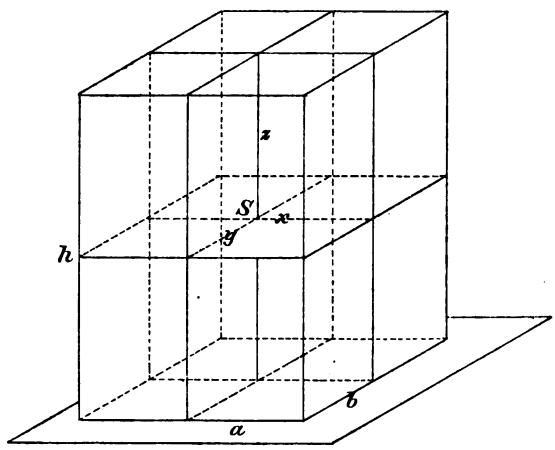
$$T_1 = \sum m(x - x_1)^2 + \sum m(y - y_1)^2 + \sum m(z - z_1)^2,$$

was sich auf $T_s + e^2 J$ reduziert.

B. Die einfachsten Formen, besonders von der Ordnung Null.

341) **Aufgabe.** Die wichtigsten Trägheitsmomente des Rechteckskörpers zu berechnen.

Fig. 251.



Auflösung. Sind a, b und c die drei Kanten, so hat in Fig. 251 jeder Horizontalschnitt die Fläche ab und in Bezug auf die Grundfläche, wenn y der Abstand ist, das Trägheitsmoment aby^2. Dies giebt, wenn man die Schichtenformel anwendet, für den ganzen Körper das Planmoment $ba\frac{c^3}{3}$ oder $J\frac{c^3}{3}$.

Für die parallele Schwerpunktsebene wird nach Nr. 338

$$T_s = J\frac{c^2}{3} - J\left(\frac{c}{2}\right)^2 = J\frac{c^2}{12} = \frac{abc^3}{12}.$$

In Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehenden Koordinatenebenen ist also

$$T_{xy} = \frac{abc^3}{12}, \quad T_{yz} = \frac{bca^3}{12}, \quad T_{zx} = \frac{cab^3}{12}.$$

Die Axialmomente für die durch S gehenden Koordinatenachsen werden

$$T_x = T_{zx} + T_{xy} = \frac{cab^3}{12} + \frac{abc^3}{12} = \frac{abc}{12}(b^2 + c^2) = \frac{J}{12}(b^2 + c^2),$$

$$T_y = T_{xy} + T_{yz} = \frac{abc^3}{12} + \frac{bca^3}{12} = \frac{abc}{12}(c^2 + a^2) = \frac{J}{12}(c^2 + a^2),$$

$$T_z = T_{yz} + T_{zx} = \frac{bca^3}{12} + \frac{cab^3}{12} = \frac{abc}{12}(a^2 + b^2) = \frac{J}{12}(a^2 + b^2).$$

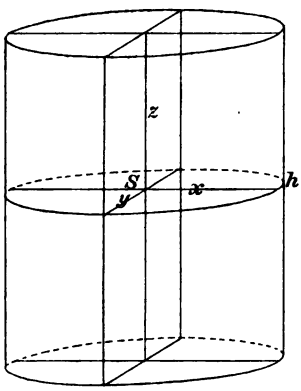
Das Polarmoment für den Schwerpunkt wird

$$T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = \frac{abc}{12}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{J}{12}d^2,$$

wo d die Hauptdiagonale ist.

324) **Aufgabe.** Die wichtigsten Trägheitsmomente für den Kreïscylinder zu berechnen.

Fig. 252.



In Fig. 252 ist jeder Horizontalschnitt gleich $r^2\pi$, sein Trägheitsmoment beim Abstande y von der Grundfläche ist in Bezug auf diese gleich $r^2\pi y^2$. Nach der Schichtenformel ergiebt sich $\frac{r^2\pi h^3}{3} = \frac{Jh^2}{3}$ als Trägheitsmoment des ganzen Körpers in Bezug auf die Grundfläche.

Für die horizontale Schwerpunktsebene wird nach Nr. 338

$$T_{xy} = \frac{r^2\pi h^3}{3} - (r^2\pi h)\left(\frac{h^2}{2}\right) = \frac{r^2\pi h^3}{12} = \frac{Jh^2}{12}.$$

Das Polarmoment der Grundfläche ist in Bezug auf ihren Mittelpunkt gleich $\frac{r^4\pi}{2}$, folglich das Trägheitsmoment des ganzen Körpers in Bezug auf die z-Achse gleich $\frac{r^4\pi h}{2} = \frac{Jr^2}{2} = T_z$.

Für jede der beiden durch die z-Achse gelegten Koordinatenebenen ist das Trägheitsmoment des Körpers halb so grofs, also

$$T_{zx} = \frac{Jr^2}{4}, \quad T_{yz} = \frac{Jr^2}{4}.$$

Für die durch S gehende x-Achse ist

$$T_x = T_{xz} + T_{xy} = \frac{Jr^2}{4} + \frac{Jh^2}{12} = \frac{J}{12}(3r^2 + h^2),$$

für die y-Achse durch S ist ebenso

$$T_y = T_{xy} + T_{yz} = \frac{Jh^2}{12} + \frac{Jr^2}{4} = \frac{J}{12}(3r^2 + h^2).$$

Das Polarmoment zweiter Ordnung für S ist

$$T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = \frac{Jh^2}{12} + \frac{Jr^2}{4} + \frac{Jr^2}{4} = \frac{Jh^2}{12} + \frac{Jr^2}{2} = \frac{J}{12}(h^2 + 6r^2).$$

Mechanische Aufgaben über den Cylinder siehe unter Nr. 84, 86, 89, 93, 94, 96 bis 106, wo es sich um Säulen, Achsen und Triebwellen, um schwingende Pendel u. dgl. handelt.

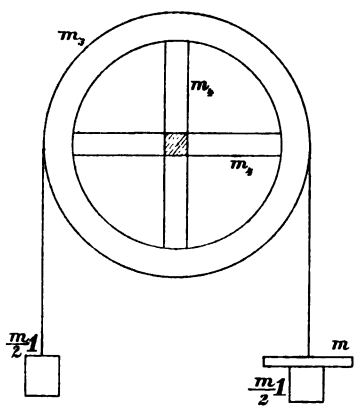
343) Das wichtigste Axialmoment des Hohlcylinders mit den Radien r und r_1.

Für den Kreisring ist das polare Trägheitsmoment $\frac{r^4\pi}{2} - \frac{r_1^4\pi}{2}$ $= \frac{\pi}{2}(r^2 - r_1^2)(r^2 + r_1^2) = \frac{F}{2}(r^2 + r_1^2)$, das entsprechende Axialmoment des Cylinders ist also $\frac{Fh}{2}(r^2 + r_1^2) = \frac{J}{2}(r^2 + r_1^2)$. In der Mechanik ist statt J die Masse $m = \frac{p}{g}$ einzusetzen, wo p in Kilogrammen, $g = 9{,}81$ in Metern gegeben werden kann. (Besser ist es, mit Tonnen und Metern zu rechnen.)

Hierzu vergleiche man die Aufgaben unter 86, 88, 90 über hohle Achsen, Hohlsäulen, Schleif- oder Mühlsteine und Schwungringe.

344) Das Gegebene reicht auch hin, in die Theorie der Atwoodschen Fallmaschine einzuführen.*) Ist nämlich m die Masse des treibenden Übergewichtes, $2\left(\frac{m_1}{2}\right) = m_1$ die der beiden Schleppgewichte, m_3 die des Ringes, m_4 die jedes durchgehenden Radarmes, wobei der schraffierte Körper doppelt genommen ist, wofür die Achse weggelassen ist, so hat man als gesamtes Trägheitsmoment

Fig. 253.



$$(m + m_1)r^2 + 2 \cdot \frac{m_4 d_1^2}{12} + \frac{m_3(r^2 + r_1^2)}{2},$$

denn die aufgehängten Gewichte bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit, als ob sie am Rande des Kreises angebracht wären, so

*) Dieses und die folgenden Beispiele aus der Dynamik können auch an Nr. 43 angeschlossen werden.

dafs der Widerstand durch $(m + m_1) r^2$ dargestellt ist. Für obiges kann man schreiben

$$T = (m + m_1) r^2 + \frac{2 m_4 r_1^2}{3} + \frac{m_3 (r^2 + r_1^2)}{2},$$

denn die Flächendiagonale d_1 des Rechtecks ist gleich $2 r_1$. Das statische Moment der Triebkraft ist $p = mg$. Die Beschleunigung am Radius 1 wird nach der Mechanik

$$\gamma = \frac{\text{stat. Moment der Triebkraft}}{\text{gesamtes Trägheitsmoment}} = g \frac{mr}{(m + m_1) r^2 + \frac{2 m_4 r_1^2}{3} + \frac{m_3 (r^2 + r_1^2)}{2}}.$$

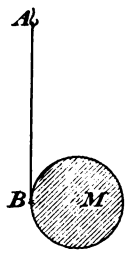
Die Beschleunigung am Radius r ist r-mal so grofs, also hat das treibende Übergewicht die Beschleunigung

$$g_1 = g \frac{mr^2}{(m + m_1) r^2 + \frac{2 m_4 r_1^2}{3} + \frac{m_3 (r^2 + r_1^2)}{2}}.$$

Die Fallbewegung des Übergewichtes geschieht nach den Formeln $v = g_1 t$, $h = \frac{1}{2} g_1 t^2$, $v = \sqrt{2 g_1 h}$. Die Fadenspannung des rechts hängenden Fadens ist $\left(m + \frac{m_1}{2}\right)(g - g_1)$, die des links hängenden $\frac{m_1}{2}(g + g_1)$, die Reibung hat die Differenz beider Spannungen zu überwinden, wenn kein Gleiten stattfinden soll.

Einige Beispiele werden zeigen, wie leicht sich jetzt mit Hülfe des Satzes von der Erhaltung der Arbeit gewisse Bewegungsprobleme ansetzen lassen.

Fig. 254.



345) **Aufgabe.** Ein Cylinder, um den ein bei A befestigter Faden gewickelt ist, falle senkrecht herab, werde aber durch den Faden zur Umdrehung gezwungen. Welches sind die Bewegungsformeln?

Auflösung. Ist sein Gewicht p, und senkt er sich um h, so ist die Arbeit der Schwerkraft ph. Ist die entsprechende Fallgeschwindigkeit v, so ist die Drehungsgeschwindigkeit an der Peripherie $\vartheta = \frac{v}{r}$, die Arbeitswucht (Energie) also

$$A = \frac{mv^2}{2} + T\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2}{2}\frac{\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{3}{4} mv^2.$$

Ebenso grofs mufs die geleistete Arbeit ph oder mgh sein. Aus $mgh = \frac{3}{4} mv^2$ folgt $v = \sqrt{\frac{4}{3} gh} = \sqrt{2\left(\frac{2}{3} g\right)h}$, während die ent-

sprechende Formel beim freiem Falle lautet $\sqrt{2gh}$. An Stelle von g tritt also hier $^2/_3 g$, die drei Fallformeln sind demnach hier

$$v = \tfrac{2}{3} gt, \quad h = \tfrac{1}{2}\tfrac{2}{3} gt^2 = \frac{gt^2}{3}, \quad v = \sqrt{2\left(\tfrac{2}{3}g\right)h}.$$

Durch den Drehungszwang wird also die Fallgeschwindigkeit für jeden Zeitpunkt auf $^2/_3$ der freien Fallgeschwindigkeit herabgesetzt.

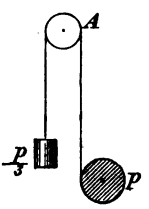
Wie grofs ist die Fadenspannung bei diesem Beispiele? Es ist $g - g_1 = g - \frac{2}{3} g = \frac{g}{3}$, die Spannung also $m\frac{g}{3} = \frac{p}{3}$. Oder wenn man den Vorgang eingehender analysieren will: Die Fadenspannung ist die Kraft, welche die Drehung hervorruft. Die Beschleunigung der letzteren ist am Rande $\frac{2}{3} g$, am Radius 1 also $\gamma = \frac{2g}{3r}$. Gleichzeitig ist aber

$$\gamma = \frac{\text{Moment der Kraft}}{\text{Trägheitsmoment}} = \frac{p_1 r}{\frac{mr^2}{2}} = \frac{2p_1}{mr},$$

wo p_1 die drehende Kraft ist. Es folgt $\frac{2p_1}{mr} = \frac{2g}{3r}$, d. h. $p_1 = \frac{mg}{3} = \frac{p}{3}$.

Die Fadenspannung beträgt also nur den dritten Teil des Cylindergewichtes. Dieses Resultat soll später zur Aufklärung über gewisse Reibungsverhältnisse benutzt werden. Statt den Faden bei A zu befestigen, kann man ihn dort über eine leicht bewegliche Rolle legen und durch das Gewicht $\frac{p}{3}$ anspannen. Der am Faden herabrollende Cylinder p hält dann dem Gewichte $\frac{p}{3}$ das Gleichgewicht, wie leicht experimentell bestätigt werden kann.

Fig. 255.



Gewöhnlich wird die behandelte Aufgabe anders angegriffen. Man betrachtet B als augenblicklichen Drehungspunkt des Cylinders, so dafs das Trägheitsmoment $\frac{mr^2}{2}$ um mr^2 zu vermehren und gleich $\frac{3}{2} mr^2$ zu setzen ist. Das Moment der Triebkraft in Bezug auf B ist pr, also ist die Winkelbeschleunigung $\gamma = \frac{pr}{\frac{3}{2} mr^2} = \frac{2mgr}{3mr^2} = \frac{2g}{3r}$. Der Punkt M befindet sich am Radius r, bewegt sich also mit der Geschwindigkeit $g_1 = \frac{2g}{3r} r = \frac{2}{3} g$. Das Resultat ist dasselbe wie oben.

346) Noch stärker läfst sich der Fall verlangsamen, wenn der Faden nicht um die Scheibe oder den Cylinder, sondern um eine Achse mit dem kleineren Radius ϱ gewunden wird. (Vgl. Nr. 93.)

Ist die Fallgeschwindigkeit v, so ist jetzt die Winkelgeschwindigkeit $\vartheta = \frac{v}{\varrho}$. Vernachlässigt man das Gewicht der Achse, welches einzurechnen übrigens keine Schwierigkeiten macht, so wird die Arbeitswucht

$$A = \frac{mv^2}{2} + \frac{T\vartheta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{\left(\frac{v}{\varrho}\right)^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{r^2 + 2\varrho^2}{2\varrho^2}.$$

Setzt man dies gleich der Arbeit ph der Schwerkraft, d. h. $= mgh$, so folgt

$$v = \sqrt{2\left(g \frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2}\right)h}.$$

An Stelle von g in der Freifallformel $v = \sqrt{2gh}$ tritt also

$$g_1 = g \cdot \frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2},$$

was als Beschleunigung in die drei Bewegungsformeln einzuführen ist. Macht man z. B. $r = 10\varrho$, so wird $g_1 = g \frac{2\varrho^2}{100\varrho^2 + 2\varrho^2} = \frac{g}{51}$. Die Fallgeschwindigkeit wird also der 51. Teil der Freifallgeschwindigkeit. (Entsprechende Versuche über Unterrichtszwecke lassen sich mit dem Rade der Atwoodschen Fallmaschine machen, um deren Achse man Fäden gewickelt hat.)

Die Fadenspannung wird hier gröfser als bei der vorigen Aufgabe, denn es ist $g - g_1 = g - g \frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2} = \frac{gr^2}{r^2 + 2\varrho^2}$, also die Spannung $\frac{mgr^2}{r^2 + 2\varrho^2} = \frac{pr^2}{r^2 + 2\varrho^2}$. Oder, wenn man die obige Betrachtung wiederholen will: Aus $g_1 = g \frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2}$ folgt als Winkelbeschleunigung (am Radius 1) $\gamma = \frac{g_1}{\varrho} = \frac{2gr}{r^2 + 2\varrho^2}$. Dieselbe Winkelbeschleunigung wird durch die Fadenspannung p_1 hervorgerufen, so dafs auch

$$\gamma = \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Trägheitsmoment}} = \frac{p_1\varrho}{\frac{mr^2}{2}}$$

ist. Aus der Gleichsetzung der rechten Seiten ergiebt sich die Fadenspannung

$$p_1 = \frac{mgr^2}{r^2 + 2\varrho^2} = \frac{pr^2}{r^2 + 2\varrho^2}.$$

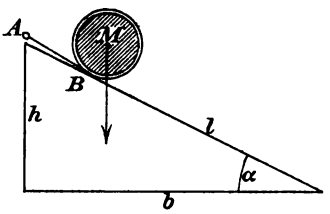
Ist z. B. $r = 10\varrho$, so folgt $p_1 = \frac{50}{51}p$, wo p das Cylindergewicht ist.

Man bemerkt, dafs bei der Herabsetzung der Freifallbeschleunigung von g auf $\frac{1}{51}g$ die Fadenspannung um $\frac{1}{51}$ des Gewichtes vermindert wird. Dies bestätigt die obige Bemerkung über den Ausdruck $m(g - g_1)$.

Der Grund, weshalb wir auf die Fadenspannung überhaupt eingingen, wird sich aus der folgenden Aufgabe ergeben.

347) Der Cylinder ist wiederum mit einem Faden umwickelt. Das Ende desselben sei aber bei A an der schiefen Ebene mit Neigung α befestigt, auf welcher der Cylinder herabrollen soll. Beschleunigung und Fadenspannung sollen berechnet werden, ohne dafs die Reibung berücksichtigt wird.

Fig. 256.



Beim senkrechten Fall ergab sich unter Drehungszwang $v = \sqrt{2\left(\frac{2}{3}g\right)h}$. Man braucht nur $l \sin \alpha$ für h zu setzen, um hier $v = \sqrt{2\left(\frac{2}{3}g\right)l \sin \alpha}$ zu finden, so dafs an Stelle von $g_1 = \frac{2}{3}g$ jetzt $g_1 = \frac{2}{3}g \sin \alpha$ als Beschleunigung tritt. Man kann aber auch so, wie vorher, die Gleichung der Erhaltung der Arbeit benutzen, oder auch B als Drehungspunkt betrachten. Das statische Moment der Schwerkraft in Bezug auf B ist dann $pr \sin \alpha$, das Trägheitsmoment aber $\frac{mr^2}{3} + mr^2 = \frac{2}{3}mr^2$. Es folgt die Winkelbeschleunigung

$$\gamma = \frac{pr \sin \alpha}{\frac{3}{2}mr^2} = \frac{2}{3}\frac{g \sin \alpha}{r},$$

also für M, d. h. für den Radius r, das r-fache oder $g_1 = \frac{2}{3}g \sin \alpha$.

Die Drehung wird, wenn keine Reibung vorhanden ist, durch die Fadenspannung p_1 hervorgerufen, so dafs auch ist: $\gamma = \frac{p_1 r}{\frac{mr^2}{2}} = \frac{2p_1}{mr}$. Gleichsetzung beider Ausdrücke für γ giebt

$$p_1 = \frac{mg \sin \alpha}{3} = \frac{p \sin \alpha}{3}.$$

348) Diese Fadenspannung giebt uns an, wie grofs die Reibung mindestens sein mufs, um das Herabgleiten zu verhindern und die Cylinderbewegung zu einer rein rollenden zu machen.

Ist also der Reibungskoeffizient für Gleitung μ, die Reibung selbst also hier $\mu p \cos \alpha$, so ist im vorliegenden Falle $\mu p \cos \alpha = \frac{p \sin \alpha}{3}$, d. h.

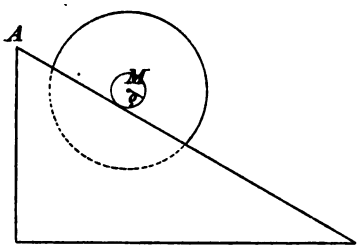
$$\mu = \frac{1}{3}\operatorname{tang} \alpha.$$

Bei den gleitenden Körpern ist bekanntlich der Koeffizient $\mu = \operatorname{tang} \alpha$; man hat also für den rollenden Cylinder das

bemerkenswerte Resultat, dafs sein Gleiten schon durch den dritten Teil derjenigen Reibung verhindert wird, die einen nicht rollenden Körper vom Gleiten abhält. Mit anderen Worten: Bei nicht rollenden Körpern findet das Gleiten bereits statt bei tang $\alpha \leqq \mu$, bei dem rollenden Cylinder erst bei tang $\alpha \geqq 3\mu$. Die Steigung der schiefen Ebene darf also hier die dreifache sein, ohne dafs Gleitung stattfindet.*)

Ist z. B. der Reibungskoeffizient $\mu = 0{,}2$, so folgt aus tang $\alpha = 0{,}2$ der sog. Reibungswinkel $11^0\,18'\,40''$. Sobald die Neigung gröfser ist, beginnen ebenflächige Körper zu gleiten. Der rollende Cylinder aber gleitet erst bei tang $\alpha = 2\mu = 0{,}6$, d. h. bei $\alpha = 30^0\,57'\,50''$. Sobald der Winkel kleiner ist, findet lediglich ein Rollen statt, und abgesehen von der geringfügigen rollenden Reibung gelten die oben entwickelten Bewegungsformeln. Ist dagegen die Neigung gröfser, so findet Rollen und Gleiten zugleich statt. Dies ist ein ganz anderer Fall mit besonderen Bewegungsgleichungen. Später soll auf diesen schwierigen Fall noch eingegangen werden.

Fig. 257.



349) Das obige Resultat ändert sich sofort, wenn der Cylinder unter Auflagerung auf eine Achse auf der schiefen Ebene herabrollt.

Zunächst werde hier wiederum die Reibung weggedacht, dafür aber ein Faden, der bei A befestigt ist, um die Achse gewunden. Nach Art der obigen Entwicklung erhält man als Beschleunigung des Punktes M

$$g_1 = g \sin\alpha \frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2},$$

als Winkelbeschleunigung (am Radius 1) also

$$\gamma = \frac{g_1}{\varrho} = \frac{2g \sin\alpha\, \varrho}{r^2 + 2\varrho^2}.$$

Die Fadenspannung p_1 am Radius ϱ giebt aber für dasselbe γ den Wert

$$\gamma = \frac{p_1 \varrho}{\frac{m r^2}{2}} = \frac{2 p_1 \varrho}{m r^2}.$$

*) In mehreren Lehrbüchern und Abhandlungen finden sich in dieser Beziehung irrtümliche Ableitungen, die auf der falschen Annahme fufsen, dafs der Reibungswinkel derselbe bliebe.

Aus der Gleichsetzung beider Werte ergiebt sich als Fadenspannung

$$p_1 = \frac{m g r^2 \sin\alpha}{r^2 + 2\varrho^2} = \frac{p \sin\alpha r^2}{r^2 + 2\varrho^2}.$$

Ist z. B. $r = 10\varrho$, so wird $p_1 = p \sin\alpha \frac{50}{51}$. Ebenso groſs muſs die gleitende Reibung sein, wenn das Gleiten verhindert werden und bloſses Rollen stattfinden soll. Der Koeffizient berechnet sich für den Grenzfall aus

$$\mu p \cos\alpha = \frac{p \sin\alpha r^2}{r^2 + 2\varrho^2},$$

also

$$\mu = \frac{r^2}{r^2 + 2\varrho^2} \operatorname{tang}\alpha,$$

im gewählten Beispiele also $\alpha = \frac{50}{51} \operatorname{tang}\alpha$, so daſs der Grenzwinkel aus $\operatorname{tang}\alpha = \frac{51}{50}\mu$ zu berechnen ist.

Ist z. B. wieder $\mu = 0{,}2$, so wird der Grenzwinkel, wie aus $\operatorname{tang}\alpha = \frac{51}{50} \cdot 0{,}2$ folgt, $\alpha = 11^0\,31'\,50''$, während er für nur gleitende Körper war: $11^0\,18'\,40''$. Der Unterschied ist also jetzt ein weit weniger auffallender als bei dem einfach aufliegenden Cylinder, wo der eine Winkel fast dreimal so groſs war als der andere.

Ein entsprechender Versuch kann wieder gemacht werden, indem man das Rad der Atwoodschen Fallmaschine mit der Achse auf zwei parallel gestellte Lineale legt und so auf schiefer Ebene herabrollen läſst. Angenommen, der Reibungskoeffizient wäre 0,2, so würde bei α gröſser als $11^0\,31'\,50''$ fast nur ein Herabgleiten, kaum ein Rollen bemerkbar sein, während ein Cylinder noch bei nahe $30^0\,58'$ einfach herabrollen würde. Für $\varrho = 0$, d. h. für unendlich dünne Achsen, hört der Unterschied ganz auf.

Versuche dieser Art sind mit so einfachen Hülfsmitteln durchzuführen und werfen so überraschendes Licht auf die entsprechenden Punkte der Bewegungslehre und der Reibungstheorie, daſs ihre Nichtberücksichtigung in den Lehrbüchern eine erhebliche Lücke bedeutet.

350) Nur noch ein Beispiel für die schiefe Ebene sei angegeben: das der herabrollenden Kugel unter dem Einflusse der Reibung oder des um den gröſsten Kreis gelegten Fadens. Das Trägheitsmoment der Kugel war schon in Nr. 174 abgeleitet worden. Die Arbeitsgleichung würde hier lauten

$$A = pl \sin\alpha = \frac{mv^2}{2} + \left(\frac{2}{5} mr^2\right) \frac{\vartheta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \left(\frac{2}{5} mr^2\right) \frac{\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{7}{5} \frac{mv^2}{2}.$$

Aus der Gleichung folgt als Geschwindigkeit des Mittelpunktes

$$v = \sqrt{2\left(\tfrac{5}{7} g \sin\alpha\right) l},$$

als Beschleunigung desselben also $g_1 = \frac{5}{7} g \sin\alpha$, sodafs die Winkelbeschleunigung ist

$$\gamma = \frac{5\, g \sin\alpha}{7\, r}.$$

Die Fadenspannung p_1 giebt aber die Winkelbeschleunigung

$$\gamma = \frac{p_1 r}{T} = \frac{p_1 r}{\frac{2}{5} m r^2} = \frac{5\, p_1}{2\, m r}.$$

Gleichsetzung beider Werte bestimmt die Fadenspannung als

$$p_1 = \tfrac{2}{7} p \sin\alpha.$$

Ersetzt man für den Grenzfall p_1 wieder durch die Reibung, so folgt

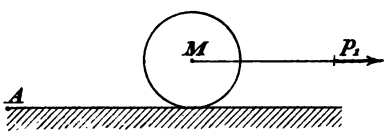
$$\mu p \cos\alpha = \tfrac{2}{7} p \sin\alpha,$$

d. h. $$\mu = \tfrac{2}{7} \operatorname{tang}\alpha \quad \text{und} \quad \operatorname{tang}\alpha = \tfrac{7}{2}\mu.$$

Daraus ergeben sich wiederum entsprechende Folgerungen. Beim Reibungskoeffizienten $\mu = 0{,}2$ würde tang $\alpha = \frac{7}{2} 0{,}2 = 0{,}7$ den Grenzwinkel $\alpha = 34^0\, 39'\, 30''$ (statt $11^0\, 18'\, 40''$) für das blofse Rollen ergeben.

351) Da die Lehrbücher elementaren Charakters auf die entwickelten Unterschiede keine Rücksicht nehmen, kommen bisweilen gelegentlich der Reibung unmögliche Beispiele vor, durch welche die bestehenden Unklarheiten noch unterstützt werden. Fast nirgends wird man z. B. folgende naheliegende Aufgabe gestellt oder berücksichtigt finden:

Fig. 258.



Ein Cylinder vom Gewichte p werde durch eine an seiner Achse angreifende Horizontalkraft p_1 auf horizontaler Bahn bewegt. Wie grofs mufs die gleitende Reibung mindestens sein, damit nicht Gleitung, sondern nur Rollen entstehe?

Zunächst werde wieder von der Reibung abgesehen und das Rollen durch einen Faden, der bei A befestigt und um den Cylinder

geschlungen ist, erzwungen. Legt nun der Angriffspunkt den Weg h zurück, so ist die Arbeitsgleichung

$$A = p_1 h = \frac{mv^2}{2} + T\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2}{2}\frac{\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{3}{4}mv^2.$$

Daraus folgt die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2\left(\frac{2}{3}\frac{p_1}{m}\right)h},$$

für den Punkt M also die Beschleunigung $g_1 = \frac{2}{3}\frac{p_1}{m}$ und demnach die Winkelbeschleunigung $\gamma = \frac{2p_1}{3mr}$. Wie früher ist zugleich die Fadenspannung p_2: $\gamma = \frac{p^2 r}{\frac{mr^2}{2}} = \frac{2p^2}{mr}$, und durch die Gleichsetzung ergiebt sich $\frac{2p_2}{mr} = \frac{2p_1}{3mr}$ oder $p_2 = \frac{p_1}{3}$.

Wie grofs also auch das Gewicht und der Radius des Cylinders seien, die Fadenspannung ist in allen Fällen der dritte Teil der Zugkraft.

Soll demnach auch ohne Faden nur Rollung ohne jedes Gleiten stattfinden, so mufs die Reibung mindestens der dritte Teil der Zugkraft sein. Sie ist aber in diesem Falle μp, also ist der Minimalwert für μ zu berechnen aus $\mu p = \frac{p_1}{3}$, d. h. er ist $\mu = \frac{p_1}{3p}$.

Sobald $\mu < \frac{p_1}{3p}$ oder $p_1 > 3\mu p$ ist, findet Gleitung und Rollung zugleich statt, und ganz neue Bewegungsgleichungen sind zu bilden. Ist z. B. $\mu = 0{,}2$, so mufs p_1 unterhalb $0{,}6\,p$ bleiben, damit nur Rollung stattfinde.

Unter dieser Bedingung bewegt sich dann M, abgesehen von der geringfügigen rollenden Reibung, nach den Formeln

$$v = \frac{2p_1}{3m}t, \quad l = \frac{1}{2}\frac{2p_1}{3m}t^2, \quad v = \sqrt{2\frac{2p_1}{3m}l},$$

die Drehung aber gehorcht den Formeln

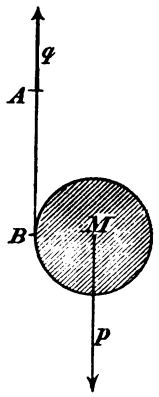
$$\vartheta = \frac{2p_1}{3mr}t, \quad \omega = \frac{1}{2}\frac{2p_1}{3mr}t^2, \quad \vartheta = \sqrt{2\frac{2p_1}{3mr}\omega}.$$

352) Wie aber erfolgt die Bewegung, wenn jene Bedingung nicht stattfindet, d. h. wenn $p_1 > 3\mu p$ ist?

Die Lösung ergiebt sich durch folgende Hülfsaufgabe, die auch an sich nicht ohne Interesse ist.

Ein Faden sei um einen Cylinder vom Gewichte p geschlungen; er werde durch eine Kraft q bei A senkrecht nach oben gezogen. Wie bewegen sich die Punkte M und A, und wie dreht sich der Cylinder?

Fig. 259.



Auflösung. Man zerlege p in q und $p - q$. Die Kraft q und die nach oben gerichtete $(-q)$ bilden das Kräftepaar, welches den Cylinder in Drehung versetzt, die Kraft $p - q$ zieht ihn nach unten. Die Drehung erfolgt also mit der Beschleunigung $\gamma = \frac{qr}{\left(\frac{mr^2}{2}\right)} = \frac{2q}{mr}$, also am Rande mit der Beschleunigung $g_1 = \frac{2q}{m}$. Die Senkung des Punktes M geschieht mit der Beschleunigung $g_2 = \frac{p-q}{m}$. Der Punkt B senkt sich erstens mit der Beschleunigung g_2, steigt aber zweitens mit der Beschleunigung g_1, seine wirkliche Beschleunigung, ebenso die von A, ist demnach

$$g_2 - g_1 = \frac{p-q}{m} - \frac{2q}{m} = \frac{p-3q}{m}.$$

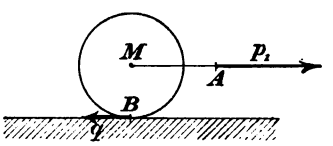
(Ist $p = 3q$, so steht A still, was mit dem früher behandelten Falle übereinstimmt.)

Es ist nicht überflüssig, auch hier den Satz von der Erhaltung der Arbeit zu prüfen. Die Arbeitswucht der bewegten Masse ist $\frac{mv^2}{2} + T\frac{\vartheta^2}{2}$. Ist h die Senkung von M, so ist $v = \sqrt{2g_2h}$, also $\frac{mv^2}{2} = mg_2h = (p-q)h$. Ist ferner ω der Drehungsweg für den Radius 1, so ist die Winkelgeschwindigkeit $\vartheta = \sqrt{2\gamma\omega}$, also $T\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{mr^2}{2} \cdot \gamma\omega = \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{2q}{mr}\omega = qr\omega$. Nun ist aber $\omega : h = \gamma : g_2 = \frac{2q}{mr} : \frac{p-q}{m}$, also $\omega = \frac{2ph}{r(p-q)}$. Folglich ist $T\frac{\vartheta^2}{2} = qr\omega = \frac{2q^2h}{p-q}$. Die Summe der Arbeitsfähigkeiten ist also $(p-q)\,h + \frac{2q^2h}{p-q} = \frac{h}{p-q}[p + 3q^2 - 2pq]$. Ist dies eben so grofs wie die geleisteten Arbeiten? Die Kraft p hat den Weg h nach unten, die Kraft q den Weg h_1 nach oben zurückgelegt; die Leistungen sind also zusammen $ph - qh_1$. Es ist aber $h_1 : h = g_3 : g_2 = \frac{h-3q}{m} : \frac{h-q}{m}$, also $h_1 = h\frac{p-3q}{p-q}$ und $qh_1 = qh\frac{p-3q}{p-q}$. Die Arbeitsleistung ist also $ph - qh\frac{p-3q}{q-p}$

$= \frac{h}{p-q}[p^2 + 3q^2 - 2pq]$. Dies stimmt mit dem obigen Resultate überein, die Giltigkeit des Satzes ist also nachgewiesen.

353) Die Anwendung auf das Reibungsproblem ist nun sehr einfach. Das Gewicht des Cylinders sei wiederum p, die ziehende Kraft p_1, die gleitende Reibung $q = \mu p$ und $p_1 > 3q$, wie vorausgesetzt werden musste, um Rollung und Gleitung zugleich zu erhalten. Die rollende Reibung bleibe unberücksichtigt. Die Beschleunigung der Drehung erfolgt

Fig. 260.



durch das Kräftepaar $\pm q$ am Radius r, ist also $\gamma = \frac{qr}{\left(\frac{mr^2}{2}\right)}$ $= \frac{2\mu pr}{mr^2} = \frac{2\mu g}{r}$. An der Peripherie ist die Beschleunigung $g_1 = 2\mu g$. Der Kraftüberschuſs $p_1 - q = p_1 - \mu p$ bringt die davon unabhängige Beschleunigung von M hervor, und diese wird $g_2 = \frac{p_1 - \mu p}{m}$. Die Schleifung des Punktes B hat die Beschleunigung

$$g_3 = g_2 - g_1 = \frac{p_1 - \mu p}{m} - 2\mu g = \frac{p_1 - 3\mu p}{m}.$$

(Das Schleifen ist Null, sobald $p_1 = 3\mu p$ ist. Es findet statt, sobald $p_1 > 3\mu p$ ist, es findet nicht statt, sobald $p_1 < 3\mu p$ ist. Die Anfangsgeschwindigkeit war als Null vorausgesetzt.) Der von M zurückgelegte Weg l verhält sich zum Reibungswege l_1 wie g_2 zu g_3

Die Arbeitsgleichung würde sein

$$A = p_1 l = \frac{mv^2}{2} + \frac{T\vartheta^2}{2} + ql_1,$$

wo der letzte Posten die Reibungsarbeit ist. Dafs aber

$$p_1 l - ql_1 = \frac{mv^2}{2} + \frac{T\vartheta^2}{2}$$

ist, war schon bei dem Hülfsbeispiele nachgewiesen worden.

Die Bewegungsgleichungen für M sind

$$v = \frac{p_1 - \mu p}{m} t, \quad l = \frac{1}{2}\frac{p_1 - \mu p}{m} t^2, \quad v = \sqrt{2\frac{p_1 - \mu p}{m} l};$$

die Gleichungen für die Drehung sind

$$\vartheta = \frac{2\mu g}{r} t, \quad \omega = \frac{1}{2}\frac{2\mu g}{r} t^2, \quad \vartheta = \sqrt{2\frac{2\mu g}{r}\omega}.$$

Das Schleifen geschieht nach den Formeln

$$v_1 = \frac{p_1 - 3\mu p}{m} t, \quad l_1 = \frac{1}{2}\frac{p_1 - 3\mu p}{m} t^2, \quad v_1 = \sqrt{2\frac{p_1 - 3\mu p}{m} l_1}.$$

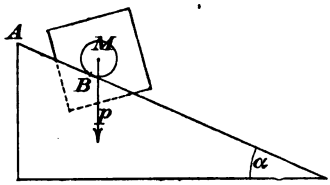
Ist die Reibung $\mu p > \frac{p_1}{3}$, so wirkt sie trotzdem stets nur in der Stärke $\mu p = \frac{p_1}{3}$. Setzt man dies ein, so wird das Schleifen Null, und die Formeln werden die früheren.

Die Richtigkeit des Ganzen kann man erproben, indem man untersucht, ob der Satz von der Erhaltung der Arbeit gewahrt bleibt. Man legt dabei bequem das Ende der ersten Sekunde zu grunde.

An einem allgemeineren Beispiele soll dies durchgeführt werden; der Abwechselung halber werde dabei die Behandlung geändert.

354) Ein beliebig gestalteter Körper rolle unter Achsenlagerung von schiefer Ebene herab. Die Achse habe den Radius ϱ, und ihre Mittellinie gehe durch den Schwerpunkt des Körpers. Wie erfolgt die Bewegung?

Fig 261.



Zunächst sei die Reibung Null und das Drehen durch den bei A befestigten und um den Cylinder geschlungenen Faden erzwungen. Die Bewegung ist Drehung um M und gleichzeitige Verschiebung oder auch Drehung um den jedesmaligen Berührungspunkt B allein. Das Moment der Schwerkraft in bezug auf diesen ist $p \sin\alpha$, die Winkelbeschleunigung also

$$\gamma = \frac{p\varrho \sin\alpha}{T + m\varrho^2} = g\frac{m\varrho \sin\alpha}{T + m\varrho^2}.$$

Ebenso grofs ist die Winkelbeschleunigung der Drehung um M. Die geradlinige Beschleunigung von M ist

$$g_1 = \gamma\varrho = \frac{p\varrho^2 \sin\alpha}{T + m\varrho^2} = g\frac{m\varrho^2 \sin\alpha}{T + m\varrho^2}.$$

Die Fadenspannung ist

$$p_1 = mg\sin\alpha - mg_1 = mg\sin\alpha\left(1 - \frac{m\varrho^2}{T + m\varrho^2}\right) = mg\sin\alpha\,\frac{T}{T + m\varrho^2}.$$

Soll die Reibung den Faden ersetzen, so muss sein

$$\mu p\cos\alpha \geqq p\sin\alpha\,\frac{T}{T + m\varrho^2};$$

der Koeffizient also

$$\mu \geqq \operatorname{tang}\alpha\,\frac{T}{T + m\varrho^2}.$$

Der Reibungswinkel für gegebenes μ folgt schliefslich aus

$$\operatorname{tang}\alpha = \mu\cdot\frac{T + m\varrho^2}{T}.$$

Ist tang α kleiner, so findet die Bewegung nach den soeben berechneten Beschleunigungen g_1 und γ statt. Ist tang α gröfser, so findet Gleitung und Rollung zugleich statt. Die Drehung entsteht durch das Kräftepaar $\pm \mu p \cos\alpha$ mit dem Hebelarme ϱ, hat also die Winkelbeschleunigung

$$\gamma_1 = \frac{\mu p \cos\alpha \varrho}{T} = g\frac{\mu m \varrho \cos\alpha}{T};$$

der Kraftüberschuss $p \sin\alpha - \mu p \cos\alpha$ giebt die fortschreitende Beschleunigung für M, nämlich

$$g_1 = \frac{p \sin\alpha - \mu p \cos\alpha}{m} = g(\sin\alpha - \mu \cos\alpha).$$

An der Peripherie ist die Drehbeschleunigung

$$g_2 - \gamma_1 \varrho = \frac{\mu p \cos\alpha \varrho^2}{T} = g\frac{\mu m \cos\alpha \varrho^2}{T},$$

die Beschleunigung des Schleifens ist also

$$g_3 = g_1 - g_2 = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\frac{T + m\varrho^2}{T}\right).$$

(Das Schleifen ist Null, sobald $\mu \leqq \operatorname{tang}\alpha\frac{T + m\varrho^2}{T}$ ist, die Probe stimmt also. Ist die Reibung gröfser, so wirkt sie trotzdem nur wie die Fadenspannung, nämlich nach dem Gesetze $\mu = \operatorname{tang}\alpha\frac{T + m\varrho^2}{T}$.)

355) Eine weitere Probe werde gemacht, um zu zeigen, wie es sich bei Reibungsproblemen mit dem Satze von der Erhaltung der Arbeit gestaltet.

Ist zunächst l_1 der von M zurückgelegte Weg, so ergiebt sich der Gleitungsweg aus der Proportion $l_3 : l_1 = g_3 : g_1$ als

$$l_3 = l_1\frac{g_3}{g_1} = l_1\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha\frac{T + m\varrho^2}{T}}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}.$$

Man setze nun folgende Arbeitsgleichung an:

Arbeit der Kraft = Energie der Massenbewegung + Reibungsarbeit,

oder

Arbeit der Kraft — Reibungsarbeit = Energie der Massenbewegung,

also

$$pl_1\sin\alpha - \mu p\cos\alpha l_1\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha\frac{T + m\varrho^2}{T}}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha} = \frac{mv^2}{2} + T\frac{\vartheta^2}{2}.$$

Ist diese Gleichung richtig? Als Zeitpunkt wähle man z. B. das Ende der ersten Sekunde. Dann ist

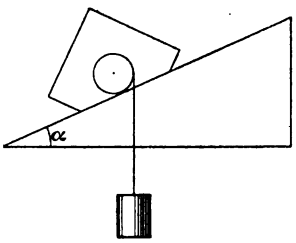
$$l_1 = \frac{g}{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),\quad v = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),\quad \vartheta = \gamma = \frac{\mu p\cos\alpha\varrho}{T}.$$

Durch Einsetzung dieser Werte formt sich die linke Seite um zu

$$\frac{pg}{2}\left[\sin^2\alpha - 2\mu\sin\alpha\cos\alpha + \mu^2\cos^2\alpha\frac{T + m\varrho^2}{T}\right].$$

Die rechte Seite führt auf denselben Wert. Die Probe mit dem Satze von der Erhaltung der Arbeit stimmt also gleichfalls.

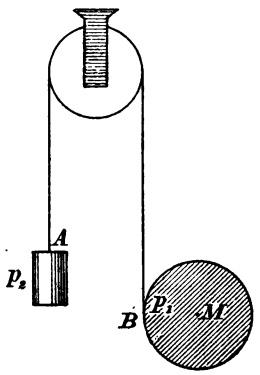
Fig. 262.



Dem Leser bleibe es überlassen, eine ganze Schar hierher gehöriger Aufgaben, z. B. solche, bei denen es sich um das Hinaufrollen handelt, selbst anzusetzen. Um jedoch zu zeigen, wie man die Schwierigkeiten des Ansatzes in mannigfacher Weise überwinden kann, behandeln wir noch ein verwandtes Beispiel.

356) Ein Faden sei über eine leichtbewegliche Rolle gelegt, deren Masse Null sei. An dem Ende A sei ein Gewicht befestigt, das andere Ende sei um einen Cylinder vom Radius r und vom Gewichte p_1 geschlungen, der infolge der Fadenspannung und Schwerkraft abrollen wird. Wie erfolgen die einzelnen Bewegungen?

Fig. 263.



Auflösung. Sinkt A mit der Beschleunigung g_2 statt g, so bleibt die Fadenspannung $S = (g - g_2)\,m_2$. Da die Masse der oberen Rolle als Null angenommen ist, so herrscht auf der andern Seite dieselbe Fadenspannung. Damit ist die Aufgabe auf eine frühere zurückgeführt, bei der es sich um die Fadenspannung g statt S handelte, nur ist noch die Unbekannte g_2 darin. Dort erfolgte die Drehung mit der Winkelbeschleunigung $\gamma = \frac{2S}{m_1 r} = \frac{2m_2(g - g_2)}{m_1 r}$, an der Peripherie also mit $g_3 = \frac{2S}{m_1} = \frac{2m_2(g-g_2)}{m_1}$, M dagegen sank mit der Beschleunigung $g_1 = \frac{p_1 - S}{m_1} = \frac{m_1 g - m_2(g - g_2)}{m_1}$. Die beiden Bewegungen von B sind entgegengesetzt, die wirkliche Bewegung also

$$g_3 - g_1 = \frac{2m_2(g - g_2) - m_1 g + m_2(g - g_2)}{m_1} = \frac{3m_2(g - g_2) - m_1 g}{m_1},$$

und dies ist zugleich die Beschleunigung g_2 von A, sodass

$$g_2 = \frac{3m_2 g - 3m_2 g_2 - m_1 g}{m_1}.$$

Daraus folgt

$$g_2 = \frac{3m_2 - m_1}{3m_2 + m_1} g = g \frac{3p_2 - p_1}{3p_2 + p_1}.$$

Dies in die Gleichungen für γ und g_1 eingesetzt, giebt die Winkelbeschleunigung

$$\gamma = \frac{4m_2 g}{r[3m_2 + m_1]} = \frac{4p_2 g}{r[3p_2 + p_1]},$$

für M aber die Beschleunigung

$$g_1 = g \frac{m_1 + m_2}{m_1 + 3m_2} = g \frac{p_1 + p_2}{p_1 + 3p_2}.$$

Setzt man z. B. $p_1 = 3p_2$, so wird, wie in einem früheren Beispiele, $g_2 = 0$, $g_1 = \frac{2}{3} g$. Setzt man $p_1 = \infty$, so wird $g_2 = g$, womit A die gröfste mögliche Geschwindigkeit erhält. Dabei wird $g_1 = \frac{g}{3}$, was die geringste Senkungsbeschleunigung für M giebt. (Ein Steigen von M würde nur möglich sein, wenn man das Gewicht p_2 durch eine Kraft ersetzte, die nicht an die Maximalbeschleunigung g gebunden ist.)

Berücksichtigt man die Masse der oberen Rolle, so wird die Lösung nicht viel schwieriger, nur ist natürlich die Fadenspannung rechts eine andere, als links. Ist nämlich die Spannung links wieder $S = m_2(g - g_2)$, so würde, da die Rolle am Rande die Beschleunigung g_2 erhält und ihre auf den Rand reduzierte Masse $\frac{m_4}{2}$ ist, für die Spannung rechts nur übrig bleiben $S - \frac{m_4}{2} g_2$ oder $S_1 = m_2(g - g_2) - \frac{m_4}{2} g_2$ $= m_2 g - g_2 \left(m_2 + \frac{m_4}{2}\right)$. Von jetzt ab ist die Aufgabe zu behandeln wie vorher.

357) Auch die Schwungradtheorie läfst sich mit den bisherigen Hülfsmitteln behandeln. Man kann bei gegebener Schwungmasse die Gröfse der Schwankungen in der Geschwindigkeit und umgekehrt aus der zulässigen Schwankung die Schwungmasse berechnen. Über dieses Kapitel vergleiche man den Anhang.

Zu entsprechenden Beispielen können noch herangezogen werden der Drehungskörper mit symmetrischem Schnitt in Nr. 125, besonders der ringförmige Wulst in Nr. 126, die Kugelbetrachtungen in Nr. 174 und 175, besonders die Stofs- und Pendeltheorie, die Energiezunahme

der sich zusammenziehenden Erde in Nr. 177, die Drehungsparaboloide verschiedener Ordnung in der Tabelle des Abschnittes 188.

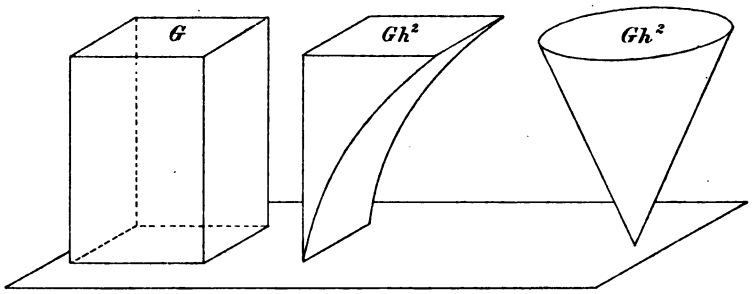
Man erkennt, welch reichen Übungsstoff man schon an diese einfachsten Körperformen anschliefsen kann, und wie viele wichtige Kapitel der Mechanik nur mit Hülfe der Trägheitsmomente erschlossen werden können.

358) In ähnlicher Weise wie der Kreiscylinder und der Rechtecksköper können andere senkrechte Cylinder und Prismen bezüglich der Trägheitsmomente behandelt werden, da jede der früher besprochenen ebenen Flächen als Grundfläche genommen werden kann.

Man beginnt mit T_u. Ist F der horizontale Querschnitt, so folgt Fy^2 als sein Trägheitsmoment, also wird $T_u = \frac{Fh^3}{3}$, und für den Schwerpunktsschnitt wird $T_{xy} = \frac{Fh^3}{12} = \frac{Jh^2}{12}$. Ist ferner t_x das eine axiale Trägheitsmoment der Grundfläche, so ist $t_x h$ das des Körpers für den entsprechenden senkrechten Schnitt, d. h. es ist $T_{xz} = t_x h$. Ist t_y das andere Axialmoment der Grundfläche, so wird $T_{yz} = t_y h$. Für die senkrechte Schwerpunktsachse wird nun $T_z = T_{xz} + T_{yz}$, für die durch den Schwerpunkt des Körpers gelegte X-Achse wird $T_x = T_{yx} + T_{zx}$, für die Y-Achse $T_y = T_{xy} + T_{zy}$. Endlich wird das Polarmoment für den Schwerpunkt des Körpers $T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx}$.

(Auch für schräge Prismen und Cylinder lassen sich gewisse Momente leicht berechnen, andere aber erfordern Kenntnisse des nächsten Abschnittes. So läfst sich z. B. das schiefe Parallelflach oft in ein senkrechtes Prisma und zwei Dachkörper zerlegen, welche letzteren aber der Ordnung 1 angehören.)

Fig. 264.



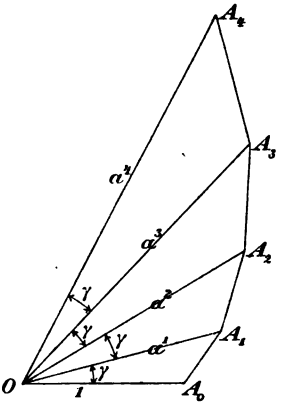
359) Im Anschlufs an Fig. 130 lassen sich auch die Trägheitsmomente der Körper von der Ordnung Null stereometrisch veranschaulichen. Wegen der Querschnittsformel $q_y = Ty^2$ handelt es sich um eine Darstellung durch Körper von der Ordnung 2. So

ist z. B. das Trägheitsmoment des ersten Körpers in Fig. 264 gleich dem Inhalte des zweiten parabolischen und auch des dritten Körpers, sobald nur die letzteren statt der Grundfläche G die Grundfläche Gh^2 erhalten.

Das Axialmoment des ersten in Bezug auf die senkrechte Achse kann man durch ein Prisma oder einen Cylinder von derselben Höhe darstellen, dessen Grundfläche gleich dem polaren Trägheitsmomente der Grundfläche des ersten Körpers ist. Ist letztere z. B. ein Quadrat von der Seite b, so hat man für die Hülfskörper die Grundfläche $\frac{b^4}{6}$ zu nehmen.

Da hier und später für die Linien mehrfach Ausdrücke höherer Dimension auftreten, so sei an folgendes erinnert.

Fig. 265.



360) Um Ausdrücke wie a^2, a^3, a^4, ... als gerade Linien darstellen zu können, mufs man neben der Länge a noch die Länge der Einheit kennen. Man bildet nun aus 1 und a ein beliebiges Dreieck OA_0A_1, setzt auf OA_1 ein ähnliches, auf OA_2 wiederum ein ähnliches und fährt so fort, dann erhält man OA_2 als a^2, OA_3 als a^3, OA_4 als a^4 u. s. w. Dies folgt aus Proportionen wie $1 : a = a : x$ oder $a : a^2 = a^2 : x$ u. s. w.

Schaltet man als Winkelhalbierende die mittleren Proportionalen zweier aufeinanderfolgenden Strahlen ein, so erhält man auch die Längen für $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{2}}$ u. s. w. Fährt man nach unten fort, so erhält man zunächst $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$ u. s. w., oder, was dasselbe ist, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, u. s. w. Die so entstehenden Eckpunkte liegen auf einer logarithmischen Spirale. Hat man diese korrekt gezeichnet und läfst man die Winkeltheilung mit Hülfe des probeweisen Zirkelabstechens auf einem Kreisbogen zu, so kann man alle Potenzen von a mit rationalem Exponenten im Prinzip konstruieren. Dreiteilung des Winkels γ giebt dann bis zur Spirale reichende Strahlen von der Länge $a^{\frac{1}{3}}$ und $a^{\frac{2}{3}}$.

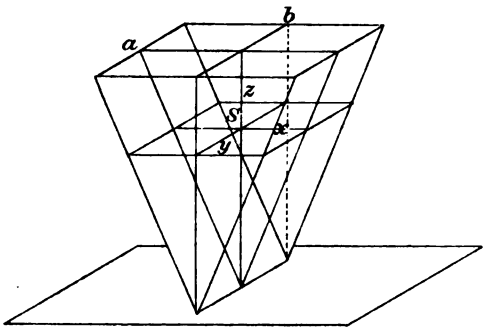
C. Körper von der Ordnung 1.

361) Der symmetrische Dreieckskörper mit rechteckiger Grundfläche.

Ist $G = ab$ der Oberschnitt, so ist der Horizontalschnitt in der

Höhe z gleich $G\frac{z}{h}$, also sein Trägheitsmoment in Bezug auf die untere Fläche $\frac{G}{h}z^3$, so dafs nach der Schichtenformel für den ganzen Körper wird

Fig. 266.



$$T_u = \frac{G}{h}\frac{h^4}{4} = \frac{Gh^3}{4} = J\frac{h^2}{2}.$$

Verlegung nach dem durch S gelegten Horizontalschnitte giebt

$$T_{xy} = \frac{Jh^2}{2} - J\left(\tfrac{3}{3}h\right)^2 = \frac{Jh^2}{18} \text{ oder auch } \frac{Gh^3}{36}.$$

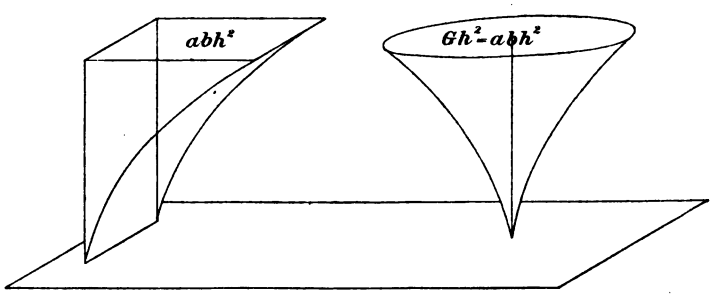
(Oder: Der durch x gelegte senkrechte Dreiecksschnitt hat in Bezug auf die X-Achse das Moment $\frac{bh^3}{36}$, demnach ist für den ganzen Körper das Planmoment $T_{xy} = \frac{bh^3}{36}a = \frac{Gh^3}{36}$.)

Der durch x gelegte senkrechte Dreiecksschnitt hat nach Nr. 32 in Bezug auf die senkrechte Mittellinie das Moment $\frac{hb^3}{48}$, folglich ist für den ganzen Körper

$$T_{yz} = \frac{hb^3}{48}a = \frac{Jb^2}{24}.$$

In Bezug auf den durch x gelegten senkrechten Dreiecksschnitt hat der Körper nach der Prismenformel $T_{zx} = \frac{Ja^2}{12}$.

Fig. 267.



Für die durch den Körperschwerpunkt gelegten Koordinatenachsen erhält man also

$$T_x = \frac{Jh^2}{18} + \frac{Ja^2}{12} = \frac{J}{36}(2h^2 + 3a^2), \quad T_y = \frac{Jb^2}{24} + \frac{Jh^2}{18} = \frac{J}{72}(3b^2 + 4h^2),$$

$$T_z = \frac{Ja^2}{12} + \frac{Jb^2}{24} = \frac{J}{24}(2a^2 + b^2).$$

Das Polarmoment für S wird

$$T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = \frac{J}{72}(6a^2 + 3b^2 + 4h^2).$$

Nach der Querschnittsformel $\frac{G}{h} z^3$ kann das Trägheitsmoment T_u dargestellt werden durch die in Fig. 267 gezeichneten parabolischen Cylinder dritter Ordnung oder durch das Drehungsneiloid, dessen Profil durch semikubische Parabeln gegeben wird.

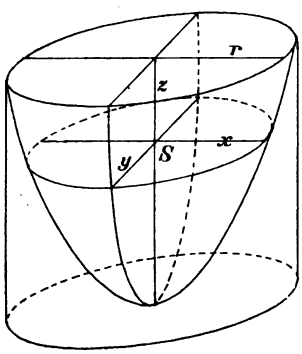
Auch für die anderen Trägheitsmomente lassen sich Darstellungen finden, die als Übungsbeispiele dienen mögen.

362) Das Drehungsparaboloid.

Der Schnitt in Höhe z ist $G\frac{z}{h}$, sein Trägheitsmoment in Bezug auf die Grundfläche $\frac{G}{h} z^3$, also wird wie vorher

$$T_u = \frac{G}{h}\frac{h^4}{4} = \frac{Jh^2}{2}, \quad T_{xy} = \frac{Jh^2}{18} = \frac{Gh^3}{36}.$$

Fig. 268



Der Radius in Höhe z ist $r\sqrt{\frac{z}{h}}$, das Polarmoment des zugehörigen Kreises ist $\frac{r^4 z^2 \pi}{2h^2} = \frac{Gr^2}{2h^2} z^2$, also ist nach der Schichtenformel für den ganzen Körper in Bezug auf die z-Achse

$$T_z = \frac{Gr^2}{2h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{Gh}{2}\frac{r^2}{3} = \frac{Jr^2}{3}.$$

Halb so grofs sind die Momente $T_{xz} = T_{yz} = \frac{Jr^2}{6}$. In Bezug auf die durch S gelegten Koordinatenachsen x und y hat man also

$$T_x = T_{xy} + T_{xz} = J\left(\frac{h^2}{18} + \frac{r^2}{6}\right) = \frac{J}{18}(h^2 + 3r^2).$$

Ebenso grofs ist T_y. Endlich ist

$$T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = J\left(\frac{h^2}{18} + \frac{r^2}{6} + \frac{r^2}{6}\right) = \frac{J}{18}(h^2 + 6r^2).$$

363) Bemerkung über die Körper von der Ordnung 1. Bei allen diesen Körpern, also auch beim elliptischen Paraboloid und

bei den umgekehrt aufgestellten parabolischen Gewölben von beliebiger Grundfläche, findet man zunächst $T_{xy} = \frac{Jh^2}{18}$. (Dies gilt auch von den entsprechenden Schrägkörpern, die aber vorläufig ausgeschlossen bleiben sollen.) T_{yz} und T_{zx} ergeben sich mit Hülfe der beiden Axialmomente des Horizontalschnittes, T_z mit Hülfe des Polarmomentes, wobei man die Summenprobe machen kann. T_x und T_y sind leicht zu bilden, ebenso T_p.

Auch die Stumpfe dieser Körper sind leicht zu berechnen, da nur der Ausdruck für h_1 vom Ausdrucke für h_2 abzuziehen und dann auf den Schwerpunkt zu reduzieren ist.

D. Körper von der Ordnung 2.

364) Der senkrechte Kreiskegel.

Der Schnitt in der Höhe z ist, wenn G die Grundfläche bedeutet, $\frac{G}{h^2} z^2$, das Trägheitsmoment in Bezug auf die Ebene, auf die der Kegel mit der Spitze gestellt ist, wird aus $q = \frac{G}{h^2} z^4$ nach der Schichtenformel als $T_u = \frac{G}{h^2} \frac{h^5}{5} = \frac{Gh^3}{5}$ abgeleitet. In Bezug auf den Horizontalschnitt durch den Schwerpunkt wird

$$T_{xy} = \frac{Gh^3}{5} - \frac{Gh}{3} \left(\tfrac{3}{4} h\right)^2 = \tfrac{3}{80} Jh^2.$$

Für die senkrechte Achse hat der Querschnitt in Höhe z das Trägheitsmoment

$$\frac{Fr_z^2}{2} = \frac{Gz^2}{h^2} \cdot \frac{\left(r\frac{z}{h}\right)^2}{2} = \frac{Gr^2 z^4}{2h^4}.$$

Die Schichtenformel giebt für den ganzen Körper

$$T_z = \frac{Gr^2 h^5}{2h^4} \frac{1}{5} = \frac{Gr^2 h}{10} = \frac{Gh}{3} \cdot \frac{3r^2}{10} = \frac{3Jr^2}{10}.$$

Für jeden vertikalen Hauptschnitt wird das Trägheitsmoment halb so grofs, also ist

$$T_{yz} = T_{zx} = \frac{3Jr^2}{20}.$$

Daraus folgt

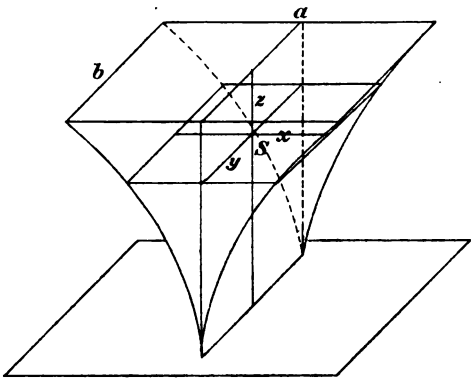
$$T_x = T_{xz} + T_{xy} = \frac{3Jr^2}{20} + \frac{3Jh^2}{80} = \frac{3J}{80}(4r^2 + h^2).$$

Ebenso grofs ist T_y. Das Polarmoment in Bezug auf den Schwerpunkt wird

$$T_x + T_y + T_z = 2 \cdot \frac{3J}{80}(4r^2 + h^2) + \tfrac{4}{4} \cdot \frac{3Jr^2}{10} = \frac{3J}{40}(16r^2 + h^2).$$

365) Parabolischer Cylinder. Der in Fig. 269 dargestellte parabolische Cylinder zweiter Ordnung, der symmetrisch von zwei parabolischen Flächen begrenzt ist, hat in Höhe z den Querschnitt $\frac{G}{h^2} z^2$, so dafs wie vorher

Fig. 269.



$$T_u = \frac{G h^5}{h^2 5} = \frac{G h^3}{5}$$
$$= \frac{G h}{3} \frac{3 h^2}{5} = \frac{3 J h^2}{5}$$

wird. Für den Schwerpunktsschnitt wird

$$T_{xy} = \frac{3 J h^2}{5} - J \left(\frac{3 h}{4}\right)^2$$
$$= \frac{3 J}{80} h^2,$$

wobei $J = \frac{a b h}{3}$ ist.

Der Oberschnitt habe in Bezug auf seine Mittellinien die Trägheitsmomente

$$T_1 = \frac{b a^3}{12} \quad \text{und} \quad T_2 = \frac{a b^3}{12},$$

dann sind für den in Höhe z liegenden Horizontalschnitt die Momente

$$\frac{b}{12} \left(\frac{a}{h^2} z^2\right)^3 = \frac{b a^3}{12 h^6} z^6 \quad \text{und} \quad \frac{\left(a \frac{z^2}{h^2}\right)}{12} b^3 = \frac{a b^3}{21 h^2} z^2.$$

Für den ganzen Körper also wird

$$T_{yz} = \frac{b a^3}{12 h^6} \frac{h^7}{7} = \frac{a^3 b h}{84} = \frac{a b h}{3} \frac{a^2}{84} = \frac{J a^2}{28}$$

und

$$T_{zx} = \frac{a b^3}{12 h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{a b^3 h}{36} = \frac{a b h}{3} \frac{b^2}{12} = \frac{J b^2}{12}.$$

Das letzte Resultat könnte direkt nach der Prismenformel hingeschrieben werden. Folglich ist

$$T_x = T_{xy} + T_{zx} = \frac{3 J}{80} h^2 + \frac{J b^2}{12} = \frac{J}{240} (9 h^2 + 20 b^2),$$

$$T_y = T_{xy} + T_{yz} = \frac{3 J}{80} h^2 + \frac{J a^2}{28} = \frac{J}{560} (21 h^2 + 20 a^2),$$

$$T_z = T_{zx} + T_{yz} = \frac{J b^2}{12} + \frac{J a^2}{28} = \frac{J}{84} (7 b^2 + 3 a^2).$$

Das Polarmoment für den Schwerpunkt wird

$$T_p = (T_{xy} + T_{yz}) + T_{zx} = \frac{J}{560}(21\,h^2 + 20\,a^2) + \frac{Jb^2}{12}$$
$$= \frac{J}{1680}(63\,h^2 + 60\,a^2 + 140\,b^2).$$

366) In derselben Weise sind alle Arten von senkrechten Körpern zweiter Ordnung zu behandeln, z. B. sämtliche senkrechten Pyramiden und Kegel, wobei die letzteren beliebige, z. B. auch elliptische Grundfläche haben können.

Die Trägheitsmomente dieser Körper können ebenfalls veranschaulicht werden, z. B. T_u durch den von der Parabel vierter Ordnung $x = \frac{G}{h^2}z^4$ begrenzten parabolischen Cylinder, dessen Inhalt $\frac{G}{h^2}\frac{h^5}{5} = \frac{Gh^3}{5}$ ist. Für ihn kann auch ein Drehungskörper eintreten, der von Parabeln zweiter Ordnung begrenzt ist. Sein Schnitt in der Höhe y ist $x^2\pi = \frac{G}{h^2}z^4$, so dafs die Gleichung der begrenzenden Kurve ist $x = \frac{G}{h^2\pi}z^2$.

Die Stumpfe der Körper zweiter Ordnung sind nach der Subtraktionsmethode zu behandeln, indem man vom Körper von der Höhe h_2 den von der Höhe h_1 abzieht.

E. Körper gemischter Ordnung bis zur zweiten Potenz.

367) Die Kugel. Dieser Körper ist bereits in Nr. 174 behandelt, und zwar ist für ihn

$$T_{xy} = T_{yz} = T_{zx} = \tfrac{4}{15}r^5\pi = \tfrac{1}{5}Jr^2, \quad \text{also} \quad T_x = T_y = T_z = \tfrac{2}{5}Jr^2,$$

das Polarmoment in Bezug auf den Mittelpunkt aber gleich $\frac{3}{5}Jr^2$. Demnach ist derjenige Radius, dessen Quadrat für alle Kugelpunkte das mittlere ist, zu bestimmen aus $\varrho_p^2 = \frac{\frac{3}{5}Jr^2}{J} = \frac{3}{5}r^2$, so dafs $\varrho_p = r\sqrt{\frac{3}{5}}$ ist. Dagegen ist der axiale Trägheitsradius $\varrho = r\sqrt{\frac{2}{5}}$, der auf den Hauptschnitt bezogene Trägheitsradius der Halbkugel $\varrho_f = r\sqrt{\frac{1}{5}}$, wie aus $\varrho_f^2 = \frac{\frac{2}{5}\frac{J}{2}r^2}{\frac{J}{2}}$ folgt. Für den Horizontalschnitt der Halbkugel in der Höhe z ist nach 174

$$q_z = r^2\pi z^2 - \pi z^4.$$

Demnach kann das Trägheitsmoment der Halbkugel veranschaulicht werden durch den parabolischen Cylinder, der von der Parabel ge-

mischter Ordnung $x = r^2\pi z^2 - \pi z^4$ begrenzt wird, oder durch den Drehungskörper, dessen Schnitt in der Höhe y ist

$$x^2\pi = r^2\pi z^2 - \pi z^4,$$

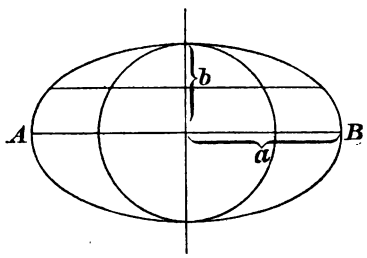
woraus sich die Gleichung der begrenzenden Kurve als

$$x^2 = r^2 z^2 - z^4$$

ergiebt.

368) Das Drehungsellipsoid mit den Halbachsen a und b. Geschieht die Drehung der Ellipse um die Achse b, so tritt an Stelle des Kreisschnittes $b^2\pi$ der Schnitt $a^2\pi$, an Stelle seines Polarmomentes $\frac{b^4\pi}{2}$ tritt $\frac{a^2\pi}{2}$, das letztere entsteht also aus dem ersteren durch Multiplikation mit $\frac{a^4}{b^4}$. Dasselbe gilt von jedem Horizontalschnitte. Demnach wird das Axialmoment des Ellipsoids (Y-Achse als senkrecht betrachtet)

Fig. 270.



$$T_y = \tfrac{2}{5}\left(\tfrac{4}{3}b^3\pi\right)b^2\frac{a^4}{b^4} = \tfrac{8}{15}a^4b\pi,$$

oder, da der Inhalt des Ellipsoids gleich $\frac{4}{3}b^3\pi \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{4}{3}a^2b\pi$ ist,

$$T_y = \tfrac{2}{5}\left(\tfrac{4}{3}a^2b\pi\right)a^2 = \tfrac{2}{5}Ja^2.$$

Für jeden senkrechten Hauptschnitt ist das Moment halb so grofs, also

$$T_{xy} = \tfrac{1}{5}Ja^2 = \tfrac{4}{15}a^4b\pi = T_{yz}.$$

Das Moment T_{zx} ergiebt sich aus dem Kugelmomente, indem man jeden Horizontalschnitt mit $\frac{a^2}{b^2}$ multipliziert, was

$$T_{zx} = \tfrac{4}{15}b^5\pi \cdot \frac{a^2}{b^2} = \tfrac{4}{15}a^2b^3\pi = \tfrac{1}{5}Jb^2$$

giebt. Demnach wird

$$T_x = T_{xy} + T_{xz} = \tfrac{1}{5}Ja^2 + \tfrac{1}{5}Jb^2 = \tfrac{1}{5}J(a^2 + b^2)$$
$$= \tfrac{4}{15}a^2b\pi(a^2 + b^2) = T_z.$$

Endlich folgt als Polarmoment

$$T_p = (T_{xy} + T_{yz}) + T_{zx} = \tfrac{2}{5}Ja^2 + \tfrac{1}{5}Jb^2 = \frac{J}{5}(b^2 + 2a^2)$$
$$= \tfrac{4}{15}a^2b\pi(b^2 + 2a^2).$$

Der Radius, dessen Quadrat unter den Radienquadraten aller Ellipsoidpunkte das mittlere ist, ergiebt sich aus

$$\varrho_p^2 = \frac{T_p}{J} = \frac{b^2 + 2a^2}{5}$$

als

$$\varrho_p = \sqrt{\frac{b^2 + 2a^2}{5}}.$$

Der axiale Trägheitsradius ist für die Y-Achse $\varrho_p = a\sqrt{\frac{2}{5}}$, für die X-Achse und Z-Achse $\varrho_p = \frac{1}{5}\sqrt{a^2 + b^2}$. In Bezug auf die Hauptschnitte des Halbellipsoids erhält man für dieses

$$\varrho_{xy} = \varrho_{ys} = a\sqrt{\tfrac{1}{5}}, \quad \varrho_{zx} = b\sqrt{\tfrac{1}{5}}.$$

Dieselben Resultate ergeben sich auf Grund der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2,$$

woraus sich die Trägheitsmomente der Querschnitte als

$$\frac{x^4\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left[a^4 - \frac{2a^4}{b^2}y^2 + \frac{a^4}{b^4}y^4\right], \quad \frac{x^4\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\left[a^4 - \frac{2a^4}{b^2}y^2 + \frac{a^4}{b^4}y^4\right],$$

$$x^2\pi \cdot y^2 = \pi\left[a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2\right]$$

ergeben, auf deren jedes die Schichtenformel anzuwenden ist.

Entsteht das Drehungsellipsoid durch Drehung um die Achse a, so sind in allen Formeln a und b zu vertauschen.

369) Das dreiachsige Ellipsoid. Die Achsen seien der Gröfse nach a, b und c, den Koordinatenachsen des vorigen Beispiels entsprechend. Das neue Ellipsoid entsteht aus dem vorigen durch konstante Verkürzung aller horizontal nach hinten gehenden Achsen mittels des Faktors $\frac{c}{a}$. Jeder Horizontalschnitt wird in demselben Verhältnis verkleinert, folglich wird

$$T_{zx} = \tfrac{4}{15}a^2b^3\pi \cdot \frac{c}{a} = \tfrac{4}{15}ab^3c\pi,$$

oder, da $\frac{4}{3}abc\pi$ der Inhalt des Körpers ist,

$$T_{zx} = \tfrac{1}{5}Jb^2.$$

Der horizontale Hauptschnitt hat in Bezug auf die x-Achse das Trägheitsmoment $\frac{ac^3\pi}{4}$, welches aus $\frac{a^4\pi}{4}$ (dem des Kreises) durch

Multiplikation mit $\frac{c^3}{a^3}$ entsteht. So ist es in jedem Horizontalschnitt, folglich wird

$$T_{xy} = \left(\tfrac{4}{15} a^4 b \pi\right) \frac{c^3}{a^3} = \tfrac{4}{15} a b c^3 \pi = \tfrac{1}{5} J c^2.$$

Jeder solche Schnitt hat in Bezug auf die z-Achse das Moment $\frac{c a^3 \pi}{4}$, welches aus dem des Kreises, d. h. aus $\frac{a^4 \pi}{4}$, durch Verkleinerung mittels des Faktors $\frac{c}{a}$ entsteht. Demnach wird

$$T_{yz} = \tfrac{4}{15} a^4 b \pi \cdot \frac{c}{a} = \tfrac{4}{15} a^3 b c \pi = \tfrac{1}{5} J a^2.$$

Jetzt folgt

$$T_x = T_{xz} + T_{xy} = \tfrac{1}{5} J(b^2 + c^2), \quad T_y = T_{xy} + T_{yz} = \tfrac{1}{5} J(c^2 + a^2),$$

$$T_z = T_{yz} + T_{zx} = \tfrac{1}{5} J(a^2 + b^2).$$

Endlich ist das Polarmoment

$$T_p = \tfrac{1}{5} J(a^2 + b^2 + c^2).$$

Dividiert man jedes Moment durch J, so erhält man das Quadrat des entsprechenden Trägheitsradius. So ist z. B. der Radius, dessen Quadrat unter allen Radienquadraten das mittlere ist,

$$\varrho = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{5}}.$$

Dieselben Resultate ergeben sich aus der Untersuchung der Schnitte in der Höhe y, nur treten dabei irrationale Ausdrücke auf.

370) Kugelabschnitt. Nach Nr. 313 ist der Horizontalschnitt

$$q_y = x^2 \pi = 2r\pi y - \pi y^2,$$

also das Trägheitsmoment in Bezug auf die Grundebene der Fig. 228

$$2r\pi y^3 - \pi y^4.$$

Für den Körper von Höhe h wird also

$$T_u = 2r\pi \frac{h^4}{4} - \pi \frac{h^5}{5}.$$

Der Schwerpunkt erfordert nach Nr. 313 Verschiebung um

$$y_s = \frac{h}{4} \cdot \frac{8r - 3h}{3r - h},$$

so dafs für die Horizontalebene durch S

$$T_{zx} = T_u - y_s^2 J = 2r\pi \frac{h^4}{4} - \frac{\pi h^5}{5} - \frac{h^2}{16}\left(\frac{8r-3h}{3r-h}\right)^2 \frac{\pi h}{3}(3r^2 - h^2)$$

ist, was sich noch vereinfachen läfst. Hier ist es aber vorzuziehen, mit den Hülfswerten h_s und J zu rechnen.

Das Polarmoment des Schnittes in Höhe y ist

$$q_y = \frac{x^4\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(2ry - y^2)^2 = \frac{\pi}{2}(4r^2y^2 - 4ry^3 + y^4).$$

Demnach wird für den Körper in Bezug auf die senkrechte y-Achse

$$T_y = \frac{\pi}{2}\left(4r^2\frac{h^3}{3} - 4r\frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{5}\right) = \frac{\pi h^3}{2}\left(\frac{4r^2}{3} - rh + h^2\right).$$

Für jeden senkrechten Hauptschnitt wird das Moment halb so grofs, also

$$T_{yx} = \frac{\pi h^3}{4}\left(\frac{4r^2}{3} - rh + h^2\right) = T_{yz}.$$

Die durch den Schwerpunkt gelegten Koordinatenachsen geben neben dem obigen T_y noch

$$T_x = T_{xy} + T_{xz} = T_z,$$

ebenso

$$T_p + T_{xy} + T_{yz} + T_{zx},$$

was ziemlich komplizierte Formeln giebt, aber keine Schwierigkeiten macht.

371) Kugelschicht. Sind r, h_1 und h_2 gegeben, so ist mit den Formeln in Nr. 314a zu arbeiten. Sind a, b und h gegeben, so ist die Formel

$$x^2 = (a^2 - h^2 - 2hz) + 2(z + h)y - y^2$$

aus Nr. 314b anzuwenden, aus der sich die Momente x^2y^2, $\frac{x^4\pi}{4}$, $\frac{x^4\pi}{2}$ leicht ableiten lassen. Die Resultate werden mit Hülfe der Schichtenformel auf den ganzen Körper ausgedehnt.

372) Ellipsoidschichten. Sind die Schichten durch parallele Schnitte zu den Hauptebenen begrenzt, so sind die Formeln aus denen für die Schicht einer ebenso hohen Kugel abzuleiten. Am einfachsten geht man von den Hauptschnitten aus.

Die Kugel vom Radius b hat in der Höhe y den Schnitt

$$x^2\pi = b^2\pi - y^2\pi.$$

Der des Ellipsoids wird daraus abgeleitet, indem man zunächst mit $\frac{a}{b}$, dann mit $\frac{c}{b}$ multipliziert, was

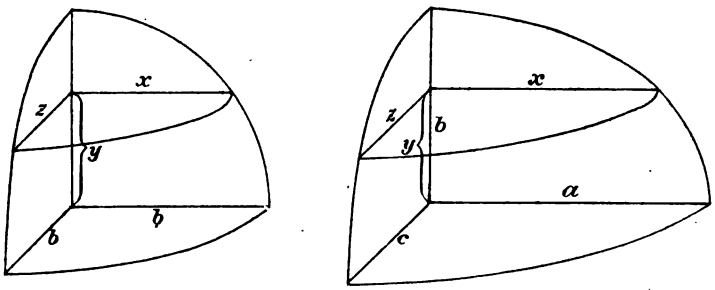
$$q_y = \frac{ac\pi}{b^2}(b^2 - y^2)$$

giebt. Man erhält für die Schicht von 0 bis y den Inhalt

$$\int_0^y J = \frac{ac\pi}{b^2}\left(b^2\frac{y}{1} - \frac{y^3}{3}\right),$$

z. B. von 0 bis b den Inhalt des Halbellipsoids $\frac{2}{3}abc\pi$.

Fig. 271.



Multipliziert man den Schnitt mit y^2, so erhält man in Bezug auf die Grundfläche sein Trägheitsmoment

$$\frac{ac\pi}{b^2}(b^2y^2 - y^4).$$

Für die Schicht von 0 bis y ergiebt sich also

$$T_{xx} = \frac{ac\pi}{b^2}\left(b^2\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right).$$

Für das Halbellipsoid wird z. B.

$$T_{xx} = \frac{ac\pi}{b^2}\left(\frac{b^5}{3} - \frac{b^5}{5}\right) = \frac{2}{15}ab^3c\pi.$$

Die Grundfläche hat in Bezug auf x das Trägheitsmoment $\frac{ac^3\pi}{4}$, was aus dem der Kreisfläche, $\frac{b^4\pi}{4}$ durch Multiplikation mit $\frac{ac^3}{b^4}$ (erst mit $\frac{a}{b}$, dann mit $\frac{c^3}{b^3}$) hervorgegangen ist. So ist es mit jedem Schnitte, also auch mit der ganzen Schicht von 0 bis y. Es folgt aus dem entsprechenden Trägheitsmomente der Kugelschicht, welches mit Hülfe von $\frac{x^4\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(b^2 - y^2)^2 = \frac{\pi}{4}(b^4 - 2b^2y^2 + y^4)$ berechnet wird und sich als

$$\frac{\pi}{4}\left(b^4y - 2b^2\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)$$

ergiebt,

$$T_{xy} = \frac{\pi}{4}\left(b^4 y - 2b^2\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)\frac{ac^3}{b^4}.$$

Für die Schicht von 0 bis b z. B. ergiebt sich

$$\frac{ac^3\pi}{4b^4}\left(b^5 - \tfrac{2}{3}b^5 + \tfrac{1}{5}b^5\right) = \tfrac{2}{15}abc^3\pi.$$

In Bezug auf z hat die Grundfläche das Trägheitsmoment $\frac{ca^3\pi}{4}$, was aus $\frac{b^4\pi}{4}$ durch Multiplikation mit $\frac{a^3c}{b^4}$ hervorgeht. Aus dem Momente der Kreisschicht von 0 bis y, d. h. aus

$$\frac{\pi}{4}\left(b^4 y - 2b^2\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right),$$

ergiebt sich also

$$T_{yz} = \frac{\pi}{4}\left(b^4 y - 2b^2\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)\frac{a^3c}{b^4}.$$

Der Schwerpunkt der Ellipsoidschicht liegt in derselben Höhe, wie der der Kreisschicht. Für letztere ist

$$h_s = \frac{M}{J} = \frac{b^2\pi\frac{y^2}{2} - \pi\frac{y^4}{4}}{b^2\pi\frac{y}{1} - \pi\frac{y^3}{3}} = \frac{3y}{4}\cdot\frac{2b^2 - y^2}{3b^2 - y^2}.$$

Die Reduktion auf den Schwerpunkt und die Berechnung von T_x, T_y, T_z und T_p für sein Koordinatensystem sei dem Leser überlassen, da es sich um ganz einfache Rechnungen handelt.

Damit ist auch die Angelegenheit der Ellipsoidsegmente und der beliebigen Horizontalschichten erledigt, denn dabei sind nur Subtraktionen oder Additionen auszuführen.

373) Das Drehungshyperboloid.

Man benutze Figur und Grundformeln des Abschnittes 316, wo sich

1) $$x^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2$$

ergeben hatte, während die Schwerpunktshöhe war

$$y_s = \frac{3h}{4}\cdot\frac{2b^2 + h^2}{3b^2 + h^2}.$$

Die Trägheitsmomente der in Höhe y liegenden Horizontalschicht sind $x^2\pi y^2$, $\frac{x^4\pi}{4}$ und $\frac{x^4\pi}{2}$, was mit Hülfe von 1) leicht auszurechnen ist. Die Formeln werden denen des Drehungsellipsoids analog.

Der Übergang zum dreiachsigen Hyperboloid erfolgt ebenso, wie der vom Drehungsellipsoid zum dreiachsigen Ellipsoid.

374) Für das zweimantelige Drehungshyperboloid sind die Formeln des Abschnittes 317 zu Grunde zu legen, mit denen ebenso leicht zu rechnen ist. Auch dort bietet der Übergang zur dreiachsigen Form keine Schwierigkeiten.

Die Prismatoide sind auf Grund des Abschnittes 318 zu behandeln und haben geringeres technisches Interesse, ohne auf Schwierigkeiten zu führen.

F. Einige Körper höherer Ordnung.

375) Ganz analog sind die Körper höherer Ordnung zu behandeln, bei denen Formeln wie

$$x = a + by + cy^2 + dy^3 + \cdots$$

oder

$$x^2 = a + by + cy^2 + dy^4 + \cdots$$

maſsgebend sind. Namentlich die mit diesen Formeln zusammenhängenden Drehungskörper bieten interessante und einfache Übungsbeispiele.

Sind die entsprechenden Reihen unendliche, so hat man sich im Konvergenzbereiche zu halten.

Hätte man das dreiachsige Ellipsoid direkt berechnet, so hätten sich als Horizontalschichten Ellipsen mit den Halbachsen $a_y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$ und $c_y = \frac{c}{b}\sqrt{c^2 - y^2}$ ergeben, was auf Trägheitsmomente von den Formen

$$a_y c_y \pi y^2 \text{ oder } \frac{ac\pi}{b^2}\sqrt{(b^2 - y^2)(c^2 - y^2)},$$

$$\frac{\pi a_y c_y^3}{4}, \quad \frac{\pi a_y^3 c_y}{4}, \quad \frac{\pi a_y c_y}{4}(a_y^2 + b_y^2)$$

geführt haben würde, die sämtlich irrational sind. Die Irrationalitäten können mit Reihenentwickelung mittels des binomischen Lehrsatzes behandelt werden, was langwierig ist und zu den anschauungsmäſsig abgeleiteten Resultaten zurückführen muſs.

376) Bezüglich der entsprechenden Drehungskörper lassen sich einige Resultate des Abschnittes IV benutzen. Hierher gehört die Formel

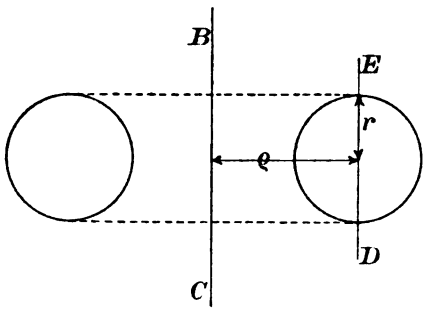
$$h_s = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{statisches Moment}}$$

im Abschnitte 116 und der dazu gehörige Symmetriefall, die Formel

$$T = J\left(\varrho^2 + 3\varrho_1^2\right)$$

des Abschnittes 125 über den dort behandelten Symmetriefall und das Beispiel des Ringkörpers mit Kreisquerschnitt, für den in Nr. 126 $T_y = 2\varrho r^2\pi^2(\varrho^2 + \frac{3}{4}r^2)$ berechnet ist, so dafs T_{xy} und T_{zy} halb so grofs sind.

Fig. 272.



Schwerer ist T_{zx} zu berechnen. Der Schnitt in der Höhe y über dem horizontalen Hauptschnitte hat die Radien

$$e_1 = \varrho + \sqrt{r^2 - y^2},$$
$$e_2 = \varrho - \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Die Schnittfläche wird also

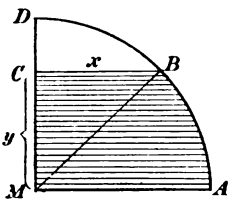
$$q_y = \pi\left(e_1^2 - e_2^2\right) = \pi\left(e_1 + e_2\right)\left(e_1 - e_2\right) = \pi 2\varrho \cdot 2\sqrt{r^2 - y^2}$$
$$= 4\varrho\pi\sqrt{r^2 - y^2}.$$

Ihr Trägheitsmoment in Bezug auf den horizontalen Hauptschnitt ist also

1) $$q_y y^2 = 4\varrho\pi y^2\sqrt{r^2 - y^2}.$$

Der variable Ausdruck $y^2\sqrt{r^2 - y^2}$ ist aber weiter nichts, als das Trägheitsmoment der Querlinie des Viertelkreises in Bezug auf den horizontalen Durchmesser. Die Anwendung der Schichtenformel auf diesen Ausdruck giebt also für die Schichten von 0 bis r das Trägheitsmoment des Viertelkreises, d. h. $\frac{r^4\pi}{16}$. Demnach giebt $4y^2\sqrt{r^2 - y^2}$ für dieselben Schichten den Ausdruck $\frac{r^4\pi}{4}$. Für die obere Hälfte des Körpers wird demnach

Fig. 273.



$$T = \frac{\varrho\pi r^4\pi}{4},$$

für den ganzen Körper entsteht

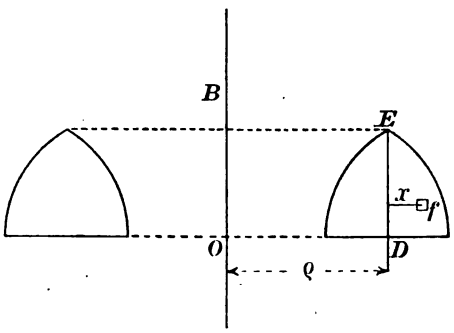
2) $$T_{xz} = 2\varrho\pi\frac{r^4\pi}{4} = 2\varrho\pi t_x,$$

wo t_x das Trägheitsmoment des Kreisschnittes für die x-Achse bedeutet. Aus T_{xz} und den übrigen Trägheitsmomenten folgt nun leicht $T_z = T_x = \varrho r^2\pi\left(\varrho^2 + \frac{5}{4}r^2\right) = J\left(\frac{\varrho^2}{2} + \frac{5}{8}r^2\right)$ und $T_p = J(\varrho^2 + r^2)$.

377) Satz für Guldinsche Körper, deren erzeugende Fläche symmetrisch gegen eine Parallele zur Drehungsachse ist.

Hat der Körper die nebenstehende Gestalt und hat der in der Höhe y liegende Horizontalschnitt die Radien e_1 und e_2, so ist die Fläche des Schnittes gleich $\pi\left(e_1^2 - e_2^2\right)$ und sein Trägheitsmoment in Bezug auf die Ebene xz ist $\pi\left(e_1^2 - e_2^2\right) y^2 = 2\pi \frac{e_1 + e_2}{2}\left(e_1 - e_2\right) y^2$. Dabei ist $\frac{e_1 + e_2}{2}$ die Entfernung ϱ der Symmetrielinie von der Achse, $(e_1 - e_2)\, y^2$ ist das Trägheitsmoment des Flächenquerschnittes in Bezug auf die X-Achse, welches t_x sei. Folglich ist nach der Schichtenformel für den ganzen Körper

Fig. 274.



$$T_{xz} = 2\varrho\pi t_x.$$

Nun war in Nr. 125 für solche Körper gezeigt, dafs $T_y = J\left(\varrho^2 + 3\varrho_1^2\right)$ war, so dafs $T_{yz} = T_{xy} = \frac{1}{2} J\left(\varrho^2 + 3\varrho_1^2\right)$ ist, demnach ist für den vorliegenden Symmetriefall

$$T_z = T_x = T_{xy} + T_{xz} = \tfrac{1}{2} J\left(\varrho + 3\varrho_1^2\right) + 2\varrho\pi t_x$$
$$= 2\varrho\pi\left[\tfrac{F}{2}\left(\varrho^2 + 3\varrho_1^2\right) + t_x\right]$$

und

$$T_p = J\left(\varrho^2 + 3\varrho_1^2\right) + 2\varrho\pi t_x = 2\varrho\pi\left[F\left(\varrho^2 + 3\varrho_1^2\right) + t_x\right].$$

Hier bedeutet ϱ_1 den Trägheitsradius der Fläche in Bezug auf die Symmetrieachse.

Daraus folgt, dafs eine grofse Zahl von Drehungskörpern, von denen die mit Hülfe von

$$x = a + by + cy^2 + dy^3 + \cdots$$

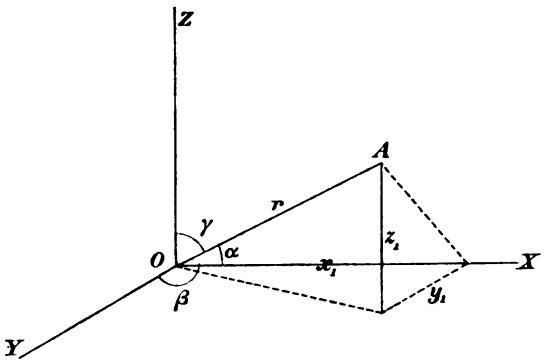
erzeugten nur spezielle Fälle sind (es handelt sich um den Sonderfall $\varrho = 0$) bezüglich ihrer Hauptschnitte vollständig behandelt werden können. Die für Räder, Kreisscheiben, Kugeln, Hohlcylinder u. dgl. gelösten Aufgaben über die Energie drehend und fortschreitend bewegter Körper, über excentrischen Stofs und Pendelbewegungen, über Fadenspannung und Rollen und Gleiten auf schiefer und horizontaler Ebene lassen sich also, soweit es sich um die Hauptschnitte und Hauptachsen handelt, auch für die hier besprochenen Drehungskörper lösen.

G. Der Drehungssatz für die Trägheitsachsen.

Einige Hülfsaufgaben der Raumgeometrie werden vorausgeschickt.

377) **Aufgabe.** Eine Gerade OA bilde mit der X-Achse und Y-Achse die Winkel α und β. Welchen Winkel γ bildet sie mit der Z-Achse?

Fig. 275.



Auflösung. Sind x_1, y_1, z_1 die Koordinaten von A, so ist

$$x_1 = r\cos\alpha,$$
$$y_1 = r\cos\beta,$$
$$z_1 = r\cos\gamma,$$

aus

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r^2$$

folgt also

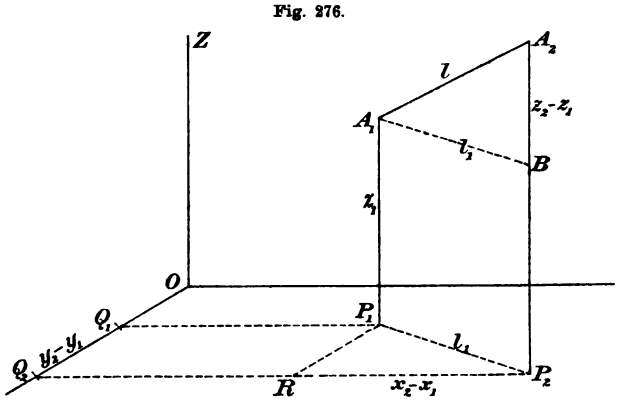
$r^2\cos^2\alpha + r^2\cos^2\beta + r^2\cos^2\gamma = r^2$, oder $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Demnach bestimmt sich γ aus

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}.$$

379) **Aufgabe.** Die Punkte A_1 und A_2 mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 seien gegeben. Wie grofs ist ihre gegenseitige Entfernung?

Fig. 276.



Auflösung. P_1 und P_2 seien die Projektionen der Punkte A_1 und A_2 auf die Grundebene, Q_1 und Q_2 die von P_1 und P_2 auf die Y-Achse, ferner sei $P_1R \parallel Q_1Q_2$, $A_1B \parallel P_1P_2$, dann ist

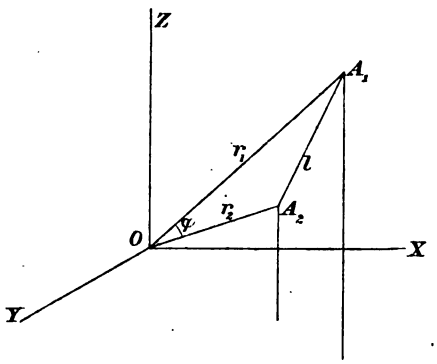
$$l_2 = l_1^2 + (z_2 - z_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

also

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

380) **Aufgabe.** Eine Gerade OA_1 bilde mit den Koordinatenachsen die Winkel α_1, β_1 und γ_1, eine andere Gerade OA_2 die Winkel α_2, β_2 und γ_2. Der Schnittwinkel φ der beiden Geraden soll berechnet werden.

Fig. 277.



Auflösung. Der Cosinussatz giebt

$$l^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos\varphi,$$

so dafs

$$2 r_1 r_2 \cos\varphi = r_1^2 + r_2^2 - l^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)$$
$$- [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2] = 2 x_1 x_2 + 2 y_1 y_2 + 2 z_1 z_2.$$

Folglich ist

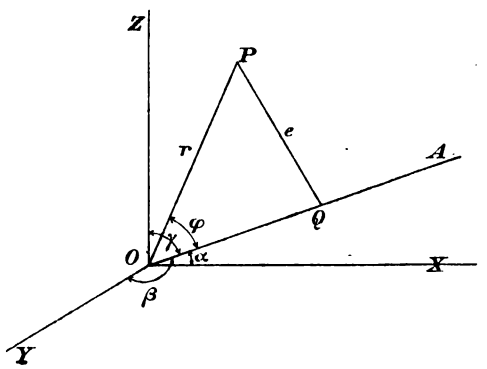
$$\cos\varphi = \frac{x_1}{r_1}\frac{x_2}{r_2} + \frac{y_1}{r_1}\frac{y_2}{r_2} + \frac{z_1}{r_1}\frac{z_2}{r_2},$$

oder

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2.$$

381) **Aufgabe.** Wie grofs ist die Entfernung e eines Punktes x, y, z von einer Geraden OA, die mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ bildet?

Fig. 278.



Auflösung. P sei der gegebene Punkt, Q seine Projektion auf die Gerade, $OP = r$ bilde mit den Achsen die Winkel ξ, η, ϑ, dann ist

$$e^2 = r^2 - OQ^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (r\cos\varphi)^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 - r^2 (\cos\alpha \cos\xi + \cos\beta \cos\eta + \cos\gamma \cos\xi)^2,$$

also, da $r\cos\xi = x$, $r\cos\eta = y$, $r\cos\zeta = z$ ist,

1) $$e^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x^2\cos^2\alpha + y^2\cos^2\beta + z^2\cos^2\gamma) - 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\eta - 2zx\cos\gamma\cos\alpha$$

oder

$$e^2 = x^2(1-\cos^2\alpha) + y^2(1-\cos^2\beta) + z^2(1-\cos^2\gamma) - 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha,$$

also

2) $$e^2 = x^2\sin^2\alpha + y^2\sin^2\beta + z^2\sin^2\gamma - 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha.$$

Die Ausziehung der Quadratwurzel giebt e.

Im Folgenden soll jedoch eine andere Formel angewendet werden, die dadurch entsteht, dafs man in Formel 1) die Klammer mit $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ multipliziert, wodurch nichts geändert wird. Dabei erhält man nach leichter Umformung

3) $$e^2 = (y^2+z^2)\cos^2\alpha + (z^2+x^2)\cos^2\beta + (x^2+y^2)\cos^2\gamma - 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha.$$

382) **Aufgabe.** Die axialen Trägheits- und Centrifugalmomente eines Körpers in Bezug auf ein Koordinatensystem seien bekannt. Wie grofs ist sein Trägheitsmoment in Bezug auf eine Achse OA, die mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β und γ bildet?

Auflösung. Nach Gleichung 3) des vorigen Abschnittes handelt es sich um

$$\sum me^2 = \cos^2\alpha\left(\sum my^2 + \sum mz^2\right) + \cos^2\beta\left(\sum mz^2 + \sum mx^2\right) + \cos^2\gamma\left(\sum mx^2 + \sum my^2\right) - 2M_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2M_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2M_{zx}\cos\gamma\cos\alpha,$$

oder, da $\sum my^2 + \sum mz^2 = T_{xx} + T_{xy} = T_x$ ist und entsprechend die anderen Klammern sich umformen,

1) $$T = T_x\cos^2\alpha + T_y\cos^2\beta + T_z\cos^2\gamma - 2M_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2M_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2M_{zx}\cos\gamma\cos\alpha.$$

Das gesuchte Trägheitsmoment kann also mit Hülfe der Axialmomente und der Centrifugalmomente leicht bestimmt werden.

383) Bedeutung der Centrifugalmomente. Ein Körper drehe sich um die Z-Achse, und P sei die momentane Lage eines Körperteilchens, dessen Entfernung von der Drehungsachse gleich e

sein möge. Ist ϑ die Winkelgeschwindigkeit, so entsteht die Centrifugalkraft $p = me\vartheta^2$, die in den Richtungen der Koordinatenachsen die Komponenten $p_x = me\vartheta^2 \cos\xi$ und $p_y = me\vartheta^2 \cos\eta$ hat, wofür man schreiben kann $p_x = mx\vartheta^2$, $p_y = my\vartheta^2$. Die statischen Momente dieser Komponenten in Bezug auf die Grundebene sind

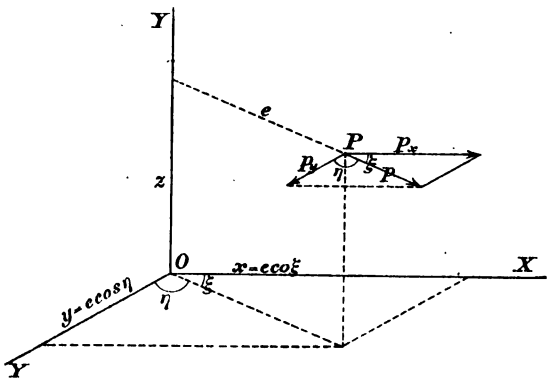
$$\vartheta^2 \sum mzx$$

und

$$\vartheta^2 \sum myz.$$

Ist $\vartheta = 1$, so hat man

Fig. 279.



$$M_{zx} = \sum mxz \text{ und } M_{yz} = \sum myz,$$

wobei x und z, ebenso y und z ihre Rolle vertauschen können. Also: $\sum mxz = M_{xz}$ ist zu deuten als das Moment der X-Komponente der Centrifugalkraft für einen sich um die z-Achse drehenden Körper in Bezug auf die Ebene XY, oder es bedeutet das Moment der Z-Komponente der Centrifugalkraft für einen sich um die X-Achse drehenden Körper in Bezug auf die Ebene YZ. In beiden Fällen ist jedoch die Winkelgeschwindigkeit $\vartheta = 1$ zu setzen. Entsprechend sind $\sum myz$ und $\sum mzx$ zu deuten.

Beispiele für Berechnung der Centrifugalmomente sollen unten gegeben werden.

384) Das Trägheitsellipsoid.

Man führe in Gleichung 1) des Abschnittes 382 die Radien der Trägheitsmomente im früheren Sinne ein, und zwar mittels der Gleichungen

$$\varrho^2 J = T, \quad \varrho_x^2 J = T_x, \quad \varrho_y^2 J = T_y, \quad \varrho_z^2 J = T_z,$$

dividiert man dann beiderseits durch J, so erhält man

$$\varrho^2 = \varrho_x^2 \cos\alpha + \varrho_y^2 \cos\beta + \varrho_z^2 \cos\gamma$$
$$- 2M_{xy} \cos\alpha \cos\beta - 2M_{yz} \cos\beta \cos\gamma - 2M_{zx} \cos\gamma \cos\alpha.$$

Man berechne hieraus ϱ und trage den reciproken Wert $\frac{1}{\varrho}$ von O aus auf der Achse OA ab. Bezeichnet man die Koordinaten des

Endpunktes mit x, y, z, so dafs $\frac{1}{\varrho}\cos\alpha = x$, $\frac{1}{\varrho}\cos\beta = y$, $\frac{1}{\varrho}\cos\gamma = z$ ist, so kann man für sämtliche Cosinus ihre Werte $\cos\alpha = x\varrho$, $\cos\beta = y\varrho$, $\cos\gamma = z\varrho$ einsetzen, worauf sich beiderseits ϱ^2 weghebt. Die Gleichung geht über in

$$1 = \varrho_x^2 x^2 + \varrho_y^2 y^2 + \varrho_z^2 z^2 - 2M_{xy}xy - 2M_{yz}yz - 2M_{zx}zx.$$

Führt man auch hier für die ϱ die reciproken Werte ein, also $a_1 = \frac{1}{\varrho_x}$, $b_1 = \frac{1}{\varrho_y}$, $c_1 = \frac{1}{\varrho_z}$, so lautet die Gleichung

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} - 2M_{xy}xy - 2M_{yz}yz - 2M_{zx}zx = 1.$$

Der geometrische Ort der Endpunkte aller $\frac{1}{\varrho}$ ist also eine Fläche zweiten Grades. Nun besteht aber ein Trägheitsmoment $\sum mr^2$ aus lauter positiven Gliedern, kann also im allgemeinen nie Null sein. Kann aber ϱ nicht Null werden, so kann $\frac{1}{\varrho}$ nicht unendlich werden, d. h. die Fläche besitzt keine unendlich fernen Punkte, sie ist also ein Ellipsoid, aber nicht ein Paraboloid oder Hyperboloid. Sie heifst das Trägheitsellipsoid des Körpers für den Punkt O. Ist O der Schwerpunkt, so heifst die Fläche das Centralellipsoid des Körpers.

385) [Dasselbe Resultat hätte Gleichung 1) des Abschnittes 381 gegeben. Man hätte erhalten

$$\sum me^2 = \sum mx^2 \sin^2\alpha + \sum my^2 \sin^2\beta + \sum mz^2 \sin^2\gamma$$
$$- 2M_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2M_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2M_{zx}\cos\gamma\cos\alpha$$

oder

1) $$T = T_{yz}\sin^2\alpha + T_{zx}\sin^2\beta + T_{xy}\sin^2\gamma$$
$$- 2M_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2M_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2M_{zx}\cos\gamma\cos\alpha,$$

so dafs man das Axialmoment T auch mit Hülfe der Planmomente berechnen kann. Führt man die Trägheitsradien ein, so ergiebt sich

$$\varrho^2 = \varrho_{yz}\sin^2\alpha + \varrho_{zx}\sin^2\beta + \varrho_{xy}\sin^2\gamma - 2M_{xy}\cos\alpha\cos\beta$$
$$- 2M_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2M_{zx}\cos\gamma\cos\alpha.$$

Berechnet man hieraus ϱ für jede Achse und trägt man den reciproken Wert $\frac{1}{\varrho}$ ein, so mufs man dieselbe Fläche erhalten, wie vorher. Hier

giebt aber $\frac{1}{\varrho}\sin\alpha$ nicht eine Koordinate x, sondern den Abstand von der X-Achse, dessen Quadrat gleich y^2+z^2 ist. Ebenso ist es mit den andern Gröfsen. Nach beiderseitiger Division durch ϱ erhält man

$$1=\frac{y^2+z^2}{a_2^2}+\frac{z^2+x^2}{b_2^2}+\frac{x^2+y^2}{c_2^2}-2M_{xy}xy-2M_{yz}yz-2M_{zx}zx,$$

oder

$$x^2\left(\frac{1}{b_2^2}+\frac{1}{c_2^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{c_2^2}+\frac{1}{a_2^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{b_2^2}\right)$$
$$-2M_{xy}xy-2M_{yz}yz-2M_{zx}zx,$$

wo a_2, b_2, c_2 die reciproken Werte für die Radien der gegebenen Planmomente bedeuten. Da aber $T_{xy}+T_{yz}=T_y$ ist, so ist $\frac{1}{c_2^2}+\frac{1}{a_2^2}=\frac{1}{b_2^2}$, ebenso ist es mit der andern Summe, also stimmt die neue Ellipsoidgleichung mit der früheren überein.]

386) Jedes Ellipsoid hat aber drei Hauptachsen a, b, c, für die seine Gleichung lautet

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Hier fehlen die Teile $-2M_{xy}xy-2M_{yz}yz-2M_{zx}zx$, also müssen für die Hauptachsen als Koordinatenachsen die Centrifugalmomente gleich Null sein. Dies gilt von den Hauptachsen für jedes Trägheitsellipsoid eines Körpers.

Geht man also von den Hauptachsen eines solchen aus, so vereinfacht sich die Bestimmungsgleichung für ein Trägheitsmoment zu folgender Gestalt:

$$T=T_x\cos^2\alpha+T_y\cos^2\beta+T_z\cos^2\gamma.$$

387) **Aufgabe.** Gegeben seien drei Trägheitsmomente T_1 in Bezug auf drei beliebige Achsen durch O, die mit den Hauptachsen die Winkel $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$, $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$, $\alpha_3,\beta_3,\gamma_3$ bilden. Die Momente für die Hauptachsen sollen bestimmt werden.

Auflösung. Man stelle folgende Gleichungen auf:

$$T_x\cos^2\alpha_1+T_y\cos^2\beta_1+T_z\cos^2\gamma_1=T_1,$$
$$T_x\cos^2\alpha_2+T_y\cos^2\beta_2+T_z\cos^2\gamma_2=T_2,$$
$$T_x\cos^2\alpha_3+T_y\cos^2\beta_3+T_z\cos^2\gamma_3=T_3.$$

Sie sind in Bezug auf die gesuchten T vom ersten Grade, lassen sich also leicht auflösen.

388) Bemerkung über die Dynamik.

Der Umstand, dafs die Centrifugalmomente für die Hauptachsen jedes Trägheitsellipsoides verschwinden, ist für die Dynamik von besonderer Bedeutung.

Aus Abschnitt 4 ist bekannt (ebenso durch die Deutung in Nr. 383), dafs bei der Drehung eines Körpers um eine feste Achse an dieser ein umstürzendes, d. h. auf Änderung der Achsenrichtung wirkendes Kräftepaar zur Geltung kommt. Dieses Kräftepaar wird aber nach obigem Null, wenn der Körper sich um eine der Hauptachsen des ihm zugehörigen Trägheitsellipsoides dreht. Dann also bleibt nur eine auf Parallelverschiebung der Achse hinarbeitende Centrifugalkraft übrig. Geht aber die Drehungsachse durch den Schwerpunkt des Körpers, oder handelt es sich um das Centralellipsoid, so ist auch die letztere Kraft gleich Null, so dafs weder Kraft noch Kräftepaar wirken. Daraus folgt im letzteren Falle:

Dreht sich ein Körper um eine Hauptachse des Centralellipsoides seiner Trägheitsmomente, so wird die Achse durch die Drehung in keiner Weise beeinflufst, d. h. sie übernimmt die Rolle einer freien Achse.

Angenommen z. B. der Erdkörper oder vielmehr das an seine Stelle zu setzende ideale Geoid sei ein homogenes dreiachsiges Ellipsoid, dessen Hauptachsen, wie sich zeigen wird, mit denen seines Trägheitsellipsoides zusammenfallen, angenommen ferner, die Drehung finde um eine der Hauptachsen statt, so würde diese Drehungsachse, vorausgesetzt dafs keine äufseren Kräfte störend einwirken, ihre Richtung im Raume konstant beibehalten.

Würde jedoch durch irgend welche äufsere Einwirkung, z. B. durch hinreichend wuchtigen Anprall eines Meteorsteins oder eines Weltkörpers eine andere Achse zur Drehungsachse gemacht, die nicht Hauptachse ist, so würde deren Richtung nicht konstant bleiben, sondern näher zu untersuchenden Schwankungen unterworfen sein.

Wird ein homogener Rechteckskörper emporgeschleudert, so bewegt sich sein Schwerpunkt in einer Parabel und aufserdem findet Drehung um eine Schwerpunktsachse statt. Ist zufällig eine der Mittellinien die Drehungsachse, so behält sie während des Wurfes ihre Lage bei, sonst aber ist dies nicht der Fall. Hierbei ist selbstverständlich vom Luftwiderstande abgesehen.

389) Fälle besonderer Einfachheit. In vielen Fällen ist die oben angegebene Berechnung der Hauptachsen nicht nötig, da man direkt aus der Gestalt des Körpers auf ihre Lage schliefsen kann. Ist z. B. die ZY-Ebene eine Symmetriebene des Körpers, so gehört

zu jedem Elemente mxy des Centrifugalmomentes ein symmetrisches $m(-x)y = -mxy$, so dafs je zwei einander aufheben. In diesem Falle ist also $\sum mxy = 0$ und $\sum mxz = 0$ und jedes auf der Symmetrieebene errichtete Lot ist Hauptachse für das Trägheitsellipsoid, welches zu seinem Fufspunkte gehört. Wählt man den Schwerpunkt, so hat man die eine Hauptachsenrichtung für das Centralellipsoid.

Sind zwei Symmetrieebenen vorhanden, z. B. die Ebene ZY und XZ, so ist wegen der ersteren $\sum mxy = 0$ und $\sum mxz = 0$, wegen der zweiten $\sum myz = 0$ (und $\sum myx = 0$). Weil für jeden Punkt ihrer Schnittlinie alle drei Momente verschwinden, hat man in jedem sofort in den Loten und den Schnittlinien die drei Hauptachsen des Trägheitsellipsoides. Wählt man den Schwerpunkt, so hat man die des Centralellipsoides.

Sind drei Symmetrieebenen vorhanden, die nicht durch ein und dieselbe Gerade gehen, so hat man in ihren Schnittlinien die Hauptachsen des Centralellipsoides.

Gehen hingegen die drei Symmetrieebenen durch eine Gerade, so ist für jeden Punkt der Schnittlinie das Trägheitsellipsoid ein Drehungsellipsoid mit der Geraden als Achse. Wählt man den Schwerpunkt, so hat man das centrale Drehungsellipsoid.

Werden die letztgenannten drei Symmetrieebenen durch eine vierte (rechtwinklig) geschnitten, so handelt es sich um das centrale Drehungsellipsoid. Dies ist z. B. der Fall bei jedem regelmäfsigen Prisma. Bei einer gewissen Länge desselben ist das centrale Drehungsellipsoid eine Kugel, in anderen Fällen ist die Drehungsachse die kleinere oder die gröfsere des Drehungsellipsoides. Beim Rechtecksköper hat man den Fall der Kugel, wenn er ein Würfel ist. Man versuche den Fall der Kugel bei dem dreiseitigen, sechsseitigen u. s. w. regelmäfsigen Prisma aufzufinden. Beispiele folgen in Nr. 398 und 400.

Bei jedem regelmäfsigen Körper ist das Centralellipsoid eine Kugel.

390) Folgerungen aus der Existenz des Trägheitsellipsoides.

a) Weil jeder Halbmesser den umgekehrten Wert des ihm zugehörigen axialen Trägheitsmomentes angiebt, so braucht man nur die drei Hauptträgheitsmomente zu kennen, um geometrisch oder rechnerisch sämtliche für das durch O gehende Strahlenbündel zu finden.

b) Sind a, b, c die nach der Gröfse geordneten Hauptachsen, so entspricht die längste a dem kleinsten Trägheitsmoment, die kürzeste c dem gröfsten für das vorliegende Strahlenbündel.

c) Es war für beliebig gerichtete Koordinaten durch einen beliebigen Punkt für den gegebenen Körper

$$T_{xy} + T_{yz} = T_y, \quad T_{yz} + T_{zx} = T_z, \quad T_{zx} + T_{xy} = T_x,$$
$$T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = T_p,$$

folglich ist

$$T_x + T_y + T_z = 2\,(T_{xz} + T_{yx} + T_{zx}) = 2\,T_p$$

und

$$T_p = T_y + T_{zx} = T_z + T_{xy} = T_z + T_{yz}.$$

Diese Gleichungen lassen sich auch schreiben als folgende

$$\varrho_{xy}^2 + \varrho_{yz}^2 = \varrho_y^2, \quad \varrho_{yz}^2 + \varrho_{zx}^2 = \varrho_z^2, \quad \varrho_{zx}^2 + \varrho_{xy}^2 = \varrho_x^2,$$
$$\varrho_x^2 + \varrho_y^2 + \varrho_z^2 = 2\,(\varrho_{xy}^2 + \varrho_{yz}^2 + \varrho_{zx}^2) = 2\,\varrho_p^2,$$
$$\varrho_p^2 = \varrho_y^2 + \varrho_{zx}^2 = \varrho_z^2 + \varrho_{xy}^2 = \varrho_z^2 + \varrho_{yz}^2.$$

Die polaren, axialen und planen Trägheitsmomente hängen also einfach zusammen, und die verschiedenen Arten von Trägheitsradien lassen sich durch Pythagoreische Addition oder Subtraktion aus einander ableiten.

d) **Aufgabe.** Die Trägheitsradien ϱ_x, ϱ_y, ϱ_z seien bekannt, wie findet man alle übrigen mit diesen Achsen zusammenhängenden Trägheitsradien?

Auflösung. $\varrho_p = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\varrho_x^2 + \varrho_y^2 + \varrho_z^2}, \quad \varrho_{xy} = \sqrt{\varrho_p^2 - \varrho_z^2},$

$$\varrho_{yz} = \sqrt{\varrho_p^2 - \varrho_x^2}, \quad \varrho_{zx} = \sqrt{\varrho_p^2 - \varrho_y^2}.$$

e) Aus $\varrho_x^2 + \varrho_y^2 + \varrho_z^2 = 2\,\varrho_p^2$ folgt der Satz: Die Summe der Trägheitsmomente für je drei auf einander senkrechte Achsen ist eine konstante Gröfse, nämlich gleich dem doppelten Quadrate des polaren Trägheitsmomentes.

Daraus folgt der geometrische Satz:

Die Summe der Quadrate der reciproken Werte je dreier auf einander senkrechter Halbmesser des Ellipsoides ist eine konstante Gröfse, und zwar gleich $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

f) Ist ferner der Satz bekannt, dafs die Summe der Quadrate je dreier konjugierter Halbmesser des Ellipsoides konstant ist, so kann man für die entsprechenden axialen Trägheitsmomente folgern, dafs die Summe ihrer reciproken Werte konstant sei, nämlich gleich $\frac{1}{T_a} + \frac{1}{T_b} + \frac{1}{T_c}$.

391) **Satz.** Legt man durch einen Punkt einer der Hauptachsen des Centralellipsoides Parallele zu den beiden andern Hauptachsen, so hat man für den Punkt die Richtungen der drei Hauptachsen des zugehörigen Trägheitsellipsoides.

Beweis. Wird der Punkt $x = a$ auf der X-Achse zur Untersuchung genommen, so handelt es sich in Bezug auf diesen um die neuen Koordinaten $\xi = (x - a)$, $\eta = y$, $\zeta = z$. Die Centrifugalmomente für das neue Koordinatensystem sind also 1) $\sum m\xi\eta = \sum m(x-a)z = \sum mxy - \sum may = \sum mxy - aJy_s = 0$, denn $\sum mxy$ war im alten Systeme gleich Null, da es sich um die Hauptachse des Centralellipsoides handelte, und der Schwerpunktsabstand y_s ist gleich Null, denn er liegt im Mittelpunkte des Centralellipsoides.

2) $\sum m\eta\zeta = \sum myz = 0$ aus entsprechendem Grunde.

3) $\sum m\zeta\xi = \sum mz(x-a) = \sum mxz - \sum maz = \sum mxz - aJz_s = 0$, ähnlich wie vorher.

392) Verschiebungssatz für das Centrifugalmoment.

Verschiebt man den Nullpunkt des Koordinatensystems um $-a$, $-b$, $-c$ vom Schwerpunkte weg, so werden die Centrifugalmomente M_{xy}, M_{yz}, M_{zx} in $M_{xy} + abJ$, $M_{yz} + bcJ$, $M_{xz} + caJ$ verwandelt.

Beweis. $\sum mxy$ geht über in $\sum m(x+a)(y+b) = \sum mxy + a\sum my + b\sum mx + ab\sum m$.

Dabei ist $\sum my = 0$ und $\sum mz = 0$, weil es sich um den Schwerpunkt als Nullpunkt des Koordinatensystems handelt. Es bleibt übrig

$$M_{x_1y_1} = M_{xy} + abJ.$$

Ebenso ist es bei den beiden andern Momenten.

393) Ist in $M_{xy} + abJ$ eine der beiden Koordinaten a, b gleich Null, so ist der Zusatz Null. Folglich:

Verschiebt man das Centrifugalmoment auf einer Schwerpunktsachse, so bleibt es ungeändert.

Ist die Schwerpunktsachse nun Hauptachse des Centralellipsoides, so bleibt der Wert des Centrifugalmomentes gleich Null, wenn man es auf dieser verschiebt.

394) **Anwendung.** Für den Schwerpunkt der Kugel sind in Bezug auf beliebig gerichtete Koordinatenachsen x, y, z die Centri-

fugalmomente gleich Null, weil sämtliche Achsen Hauptachsen sind. Verschiebt man nach $-a$, $-b$, $-c$, so erhält man

$$M_{x_1 y_1} = ab\tfrac{4}{3}r^3\pi, \quad M_{y_1 z_1} = bc\tfrac{4}{3}r^3\pi, \quad M_{z_1 x_1} = ca\tfrac{4}{3}r^3\pi.$$

Ebenso ist es bei allen Körpern mit drei Symmetrieebenen, welche die drei Hauptachsen des Centralellipsoides geben. Man kann also für beliebige parallele Koordinatenebenen sofort die Centrifugalmomente hinschreiben.

395) Bisweilen lassen sich die Centrifugalmomente leicht für andere Koordinatenachsen berechnen, bei Sektoren von Drehungskörpern z. B. in Bezug auf die Drehungsachse z und die zugehörigen Achsen x und y. Dann hat man die Verschiebung nach dem Schwerpunkte hin vorzunehmen, wobei der Ausdruck abJ bezw. bcJ, caJ abzuziehen ist. Einige Beispiele sollen später gegeben werden.

396) **Aufgabe.** In Bezug auf die Hauptebene eines Trägheitsellipsoides seien bekannt T_{xy}, T_{yz}, T_{zx}. Wie grofs ist das Trägheitsmoment T in Bezug auf eine durch den Koordinatennullpunkt gelegte Ebene, die mit den Hauptebenen yz, zx, xy die Winkel α, β (und γ) bildet?

Auflösung. Zunächst bestimmt sich γ aus der Gleichung

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}.$$

Aus Gleichung 1) des Abschnittes 385 folgt für das Lot l auf der gegebenen Ebene, welches mit den Achsen dieselben Winkel α, β und γ bildet,

$$T_l = T_{yz}\sin^2\alpha + T_{zx}\sin^2\beta + T_{xy}\sin^2\gamma,$$

denn die Centrifugalmomente fallen weg. Folglich ist für die gegebene Ebene im Anschluſs an 390c

$$T = T_p - T_l = T_{yz} + T_{zx} + T_{xy} - (T_{yz}\sin^2\alpha + T_{zx}\sin^2\beta + T_{xy}\sin^2\gamma)$$

oder

$$T = T_{yz}\cos^2\alpha + T_{zx}\cos^2\beta + T_{xy}\cos^2\gamma.$$

Die Formel für Planmomente ist also ganz analog der Formel für die Axialmomente.

397) Möglichkeit von Fixpunkten. Früher wurde gezeigt, daſs für jede ebene Fläche zwei Fixpunkte existieren, in Bezug auf

welche die Trägheitsellipse ein Kreis ist. Es fragt sich, ob solche auch für jeden Körper in dem Sinne vorhanden sind, dafs das Trägheitsellipsoid in Bezug auf sie eine Kugel ist, so dafs auch hier Erleichterungen eintreten würden. Es wird sich zeigen, dafs dies im allgemeinen nicht, sondern nur unter gewissen Bedingungen der Fall ist.

Man gehe von dem Koordinatensysteme der Hauptachsen des Centralellipsoides mit dem Schwerpunkte als Nullpunkt aus. Soll ein Punkt mit den Koordinaten a, b, c ein Fixpunkt sein, so müssen die durch ihn gelegten Parallelen zu den Koordinatenachsen Hauptachsen sein, denn jede Gerade durch den Mittelpunkt ist für die Kugel Hauptachse. Für diese Parallelen müfsten also die Centrifugalmomente verschwinden, d. h. es müfste sein

$$1)\quad \sum m(y-b)(z-c)=0,\quad 2)\quad \sum m(z-c)(x-a)=0,$$
$$3)\quad \sum m(x-a)(x-b)=0.$$

Zunächst soll die erste dieser Gleichungen untersucht werden. Sie lautet

$$\sum myz - b\sum mz - c\sum my + bc\sum m = 0.$$

Weil die Koordinaten Hauptachsen waren, ist $\sum myz = 0$ als zugehöriges Centrifugalmoment. Ferner ist $b\sum mz = bJz_s$, wo J der Inhalt des Körpers, z_s sein Schwerpunktsabstand ist. Dieser aber ist Null, denn es war vom Centralellipsoid ausgegangen, also ist $b\sum mz = 0$. Ebenso ist $c\sum my = 0$. Die Gleichung beschränkt sich auf $bc\sum m = bcJ = 0$. Da J als Körperinhalt von Null verschieden ist, mufs das Produkt $bc = 0$ sein.

Ebenso giebt die zweite Gleichung die Bedingung $ca = 0$, die dritte die Bedingung $ab = 0$.

Erste Bedingung dafür, dafs der Punkt ein Fixpunkt sei, ist also, dafs zwei der Koordinaten a, b, c gleich Null sind, d. h. der Punkt mufs auf einer der Koordinatenachsen liegen, d. h. auf einer Hauptachse. Angenommen nun, der Punkt habe die Koordinaten a, $b = 0$, $c = 0$, er liege also auf der durch den Schwerpunkt gehenden X-Achse, so sind, wenn T_x, T_y, T_z die Trägheitsmomente in Bezug auf die Hauptachsen bedeuten, die in Bezug auf die durch den Punkt gelegten Parallelen genommenen T_x, $T_y + a^2J$, $T_z + a^2J$ (Verschiebungssatz). Da sie aber gleich grofs sein sollen, so folgt zunächst aus $T_y + a^2J = T_z + a^2J$, dafs $T_y = T_z$ sein mufs, d. h. das ursprüngliche Centralellipsoid mufs ein Drehungsellipsoid mit der X-Achse als Drehungsachse sein. Ferner folgt aus $T_x = T_y + a^2J$, dafs $T_x > T_y$ und

ebenso $T_x > T_z$ sein mufs, d. h. die X-Achse ist die kleinere Achse der Ellipse, durch deren Umdrehung das Centralellipsoid entstanden ist. Ist dies der Fall, so findet man a reell aus der Gleichung $T_x = T_y + a^2 J$ als

$$a = \pm \sqrt{\frac{T_x - T_y}{J}}.$$

Folglich: Soll es Punkte geben, für die das Trägheitsellipsoid eine Kugel ist, so mufs das Centralellipsoid ein durch Drehung um die kleinere Achse entstandenes Drehungsellipsoid sein. Je nachdem diese Drehungsachse die X-Achse, Y-Achse oder Z-Achse ist, hat man auf ihr die Punkte zu suchen in der Entfernung

$$a = \pm \sqrt{\frac{T_x - T_y}{J}}, \text{ oder } b = \pm \sqrt{\frac{T_y - T_z}{J}}, \quad c = \pm \sqrt{\frac{T_z - T_x}{J}}.$$

Dafs diese Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist, ergiebt sich aus der Probe für a. Ist nämlich das Centralellipsoid durch Drehung um die X-Achse entstanden, so ist zunächst $T_y = T_z$, und wenn die X-Achse die kleinere Achse war, $T_x > T_y$. Folglich giebt es auf der X-Achse Punkte

$$x = \pm \sqrt{\frac{T_x - T_y}{J}} = a.$$

In Bezug auf jeden der beiden Punkte ist $\frac{T_x - T_y}{J}$ oder $T_x = T_y + a^2 J$ und da $T_y = T_z$ ist, $T_x = T_z + a^2 J$. Weil die drei Momente gleich sind, ist das Trägheitsellipsoid für die beiden Punkte eine Kugel.

398) **Beispiel.** Das quadratische Prisma mit den Kanten a, a, h.

Die Mittellinien sind Hauptachsen des Centralellipsoids, und zwar soll h der Achsenrichtung z entsprechen. Die Hauptträgheitsmomente sind dann

$$T_y = \frac{J}{12}(a^2 + h^2), \; T_y = \frac{J}{12}(h^2 + a^2), \; T_z = \frac{J}{12}(a^2 + a^2) = \frac{J}{6} a^2,$$

also ist $T_x = T_y$, so dafs es sich um ein centrales Drehungsellipsoid handelt. Ist nun $h < a$, so giebt $c = \pm \sqrt{\frac{T_z - T_x}{J}}$ zwei reelle Werte, nämlich $c = \pm \sqrt{\frac{a^2}{6} - \frac{a^2 + h^2}{12}} = \pm \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{12}}$. Diese Punkte sind die Fixpunkte, wie auch die Probe ergiebt.

Ist $a = h$, so fallen die Punkte $\pm c$ in den Schwerpunkt, und es handelt sich um den Würfel, dessen Centralellipsoid eine Kugel ist.

399) **Bemerkung.** Für jedes regelmäfsige Prisma und für jedes Prisma oder jeden Cylinder mit mehr als zwei durch die Achse gehenden Symmetrieebenen ist das Centralellipsoid ein Drehungsellipsoid, z. B. mit der z-Achse als Drehungsachse. Es läfst sich also stets eine Höhe h so bestimmen, dafs das Centralellipsoid eine Kugel wird. Diese Höhe ist der Grenzwert für die Existenz von Fixpunkten.

400) Beispiel des regelmäfsigen dreiseitigen Prismas.

$$T_x = \frac{b^2h^2\sqrt{3}}{48} + \frac{b^4h\sqrt{3}}{96} = T_y, \quad T_z = \frac{b^4h\sqrt{3}}{48}.$$

Setzt man $T_z = T_x$, so folgt $h = b\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Für diese Höhe ist das Centralellipsoid eine Kugel, bei geringerer Höhe aber sind zwei leicht zu berechnende Fixpunkte vorhanden, nämlich in der Entfernung

$$c = \pm\sqrt{\frac{T_z - T_x}{J}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{b^4h\sqrt{3}}{96} - \frac{2\,b^2h^2\sqrt{3}}{96}}{\frac{b^2}{4}\sqrt{3}\,h}} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 2h^2}{24}}.$$

401) Entsprechendes gilt von den Planmomenten. Handelt es sich wieder um $x = a$, ist also $T_{xy} = T_{xz}$, so bleiben diese beiden Momente für a unverändert, nur T_{yz} verwandelt sich in $T_{yz} + a^2J$. Soll nun $T_{yz} + a^2J = T_{zx}$ sein, so folgt $a = \pm\sqrt{\frac{T_{zx} - T_{yz}}{J}}$, was mit $a = \pm\sqrt{\frac{T_x - T_y}{J}}$ identisch ist. Ebenso ist im Falle b

$$b = \pm\sqrt{\frac{T_{yx} - T_{zx}}{J}},$$ im Falle c dagegen $$c = \pm\sqrt{\frac{T_{zy} - T_{xy}}{J}}.$$

Bedeutung und Anwendbarkeit der Fixpunkte sind also für Körper weit geringer, als für ebene Flächen, weil nur der Drehungsfall ins Auge zu fassen ist.

402) Die Aufgabe, mit Hülfe der Fixpunkte die Momente für beliebige Ebenen und Achsen zu finden, ist genau nach Fig. 122 zu lösen, denn man kann das Koordinatensystem so legen,

dafs die Schnittlinie der durch S gelegten Schrägebene mit der Y-Achse zusammenfällt. (In der Figur ist dann γ statt α zu schreiben.)

Die Gleichung für Flächen

$$\varrho^2 = \varrho_{yz}^2 \cos^2\alpha + \varrho_{xy}^2 \cos^2\beta + \varrho_{xy}^2 \cos^2\gamma$$

oder die für Achsen geltende

$$\varrho^2 = \varrho_x^2 \cos^2\alpha + \varrho_y^2 \cos^2\beta + \varrho_z^2 \cos^2\gamma$$

vereinfacht sich dann dadurch, dafs $\beta = 90^0$ und $\gamma = 90^0 - \alpha$ wird, also

$$\varrho^2 = \varrho_{yz}^2 \sin^2\gamma + \varrho_{xy}^2 \cos^2\gamma,$$

bezw.

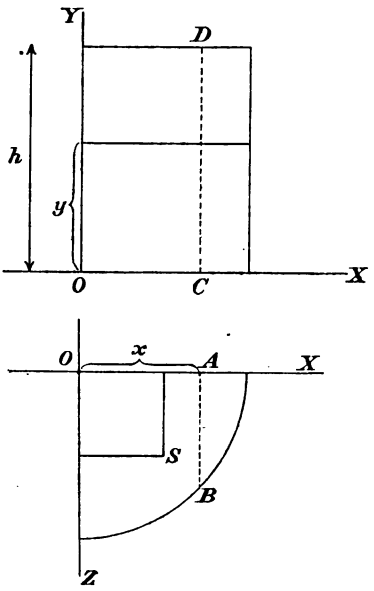
$$\varrho^2 = \varrho_x^2 \sin^2\gamma + \varrho_z^2 \cos^2\gamma.$$

Da nun

$$c = \pm\sqrt{\frac{T_{xy} - T_{xy}}{J}} = \pm\sqrt{\frac{T_z - T_x}{J}} = \pm\sqrt{\varrho_{xy}^2 - \varrho_{xy}^2} = \pm\sqrt{\varrho_z^2 - \varrho_x^2}$$

wird, so ergiebt sich dieselbe Berechnungsmethode, wie bei Fig. 122, und es wird

Fig. 280.



$$\varrho^2 = \varrho_{yz}^2 + p_1 p_2$$

bezw.

$$\varrho^2 = \varrho_x^2 + p_1 p_2.$$

403) Einige Beispiele von Centrifugalmomenten.

Quadrant des Kreiscylinders. In der Lage der Figur ist die Schicht in der Höhe y gleich $\frac{r^2\pi}{4}$, ihr Schwerpunktsabstand von der Ebene YZ ist $\frac{4r}{3\pi}$, das entsprechende Moment also $\frac{r^2\pi}{4} \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{r^3}{3}$, das Centrifugalmoment in Bezug auf die Grundebene also $\frac{r^3}{3} y$. Für den Körper von Höhe h erhält man also

$$\sum mxy = \frac{r^3}{3}\frac{h^2}{2} = \frac{r^3 h^2}{6}.$$

Ebenso grofs ist $\sum myz$. Dagegen ist $\sum mzx$ folgendermafsen zu berechnen. Die Schicht im Abstande x ist gleich

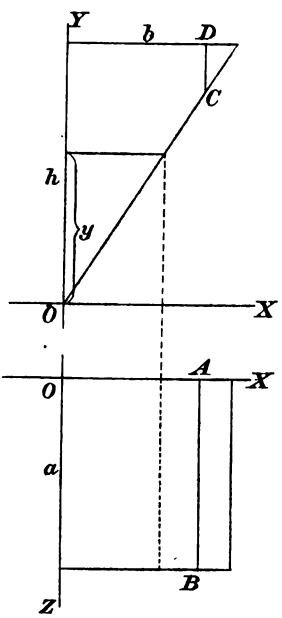
$$AB \cdot CD = h\sqrt{r^2 - x^2},$$

der Schwerpunktsabstand von der Ebene XY ist $\frac{1}{2}\sqrt{r^2 - x^2}$, das entsprechende Moment also $\frac{h}{2}(r^2 - x^2)$. Dies mit dem Abstande x multipliziert giebt $\frac{h}{2}r^2x - \frac{h}{2}x^3$. Für den ganzen Körper von 0 bis r entsteht $\frac{h}{2}r^2\frac{r^2}{2} - \frac{h}{2}\frac{r^4}{4} = \frac{hr^4}{8}$. Die Verlegung nach dem Schwerpunkte des Körpers hin bietet keine Schwierigkeit.

404) Dreieckskörper. Schicht in Höhe y ist $a\frac{b}{h}y$, Schwerpunktsabstand von Ebene YZ ist $\frac{1}{2}\frac{b}{h}y$, das entsprechende Moment also $\frac{ab^2}{2h^2}y^2$, das Centrifugalmoment für die Grundebene also $\frac{ab^2}{2h^2}y^3$. Für den ganzen Körper von 0 bis h entsteht also

$$\sum mxy = \frac{ab^2}{2h^2}\frac{h^4}{4} = \frac{ab^2h^2}{8}.$$

Fig. 281.



Die Schicht $a\frac{b}{h}y$ hat von der Ebene XY den Schwerpunktsabstand $\frac{a}{2}$ und das statische Moment $\frac{a^2b}{2h}y$, dies mit y multipliziert, giebt für die Grundebene des Centrifugalmoment $\frac{a^2b}{2h}y^2$. Für den ganzen Körper wird

$$\sum myz = \frac{a^2b}{2h}\frac{h^3}{3} = \frac{a^2bh^2}{6}.$$

Im Abstande x hat man die Schicht

$$AB \cdot CD = a \cdot h\frac{b-x}{b} = ah - \frac{ah}{b}x.$$

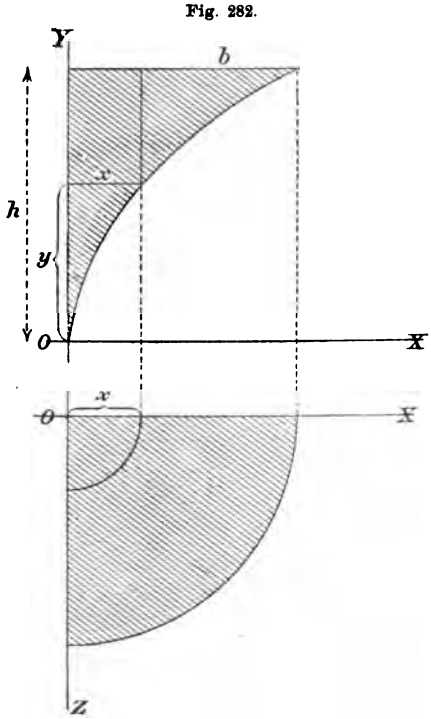
Ihr Abstand von der Ebene XY ist $\frac{a}{2}$, also das statische Moment $\frac{a^2}{2}h - \frac{a^2h}{2b}x$. Dies ist mit x zu multiplizieren und giebt das Centrifugalmoment $\frac{a^2}{2}hx - \frac{a^2h}{2b}x^2$. Für den ganzen Körper wird

$$\sum mzx = \frac{a^2h}{2}\frac{b^2}{2} - \frac{a^2h}{2b}\frac{b^3}{3} = \frac{a^2b^2h}{12}.$$

Die Verlegung nach dem Schwerpunkte hin macht keine Schwierigkeiten.

In ähnlicher Weise lassen sich parabolische Cylinder p^{ter} Ordnung und entsprechende Sektoren von Drehungsparaboloiden behandeln, auch kann man zu Drehungskörpern übergehen, deren Profilkurven Parabeln gemischter Ordnung angehören, z. B.:

Fig. 282.



405) Quadrant eines parabolischen Drehungskörpers.

In Höhe y ist $x = \frac{b}{h^2} y^2$, die Viertelkreisschicht ist also

$$\frac{x^2\pi}{4} = \frac{b^2y^4\pi}{4h^4},$$

sein Schwerpunktsabstand von der Ebene YZ ist $\frac{4x}{3x} = \frac{4by^2}{3\pi h^2}$, also das Moment

$$\sum mx = \frac{b^2y^4\pi}{4h^4} \cdot \frac{4by^2}{3\pi h^2} = \frac{b^3y^6}{3h^6}.$$

Dies mit y multipliziert giebt $\frac{b^3y^7}{3h^6}$ als das Centrifugalmoment der Schicht in Bezug auf die Grundebene. Für den ganzen Körper wird

$$\sum mxy = \frac{b^3}{3h^6}\frac{h^8}{8} = \frac{b^3h^2}{24}.$$

Der Schwerpunkt des Körpers liegt nach der parabolischen Tabelle (Seite 143) in der Höhe $y_s = \frac{5}{6}h$, wie der des vollständigen Körpers.

Zur Berechnung des andern Abstandes kann die Methode der konzentrischen Kreise benutzt werden. In Fig. 282 ist einer der Teilcylinder angedeutet. Ist x sein Radius, so ist die Grundlinie $\frac{x\pi}{2}$, die Höhe $h - y = h - \frac{h}{\sqrt{b}}\sqrt{x}$, also die Mantelfläche

$$\frac{x\pi}{2}h - \frac{x\pi}{2}\frac{h}{\sqrt{b}}\sqrt{x} = \frac{\pi h}{2}x - \frac{\pi h}{2\sqrt{b}}x^{\frac{3}{2}}.$$

Sein Schwerpunktsabstand von der Ebene YZ ist $\frac{2x}{\pi}$, also das statische Moment in Bezug auf diese

$$\frac{2x}{\pi}\frac{\pi h}{2}x - \frac{2x}{\pi}\frac{\pi h}{2\sqrt{b}}x^{\frac{3}{2}} = hx^2 - \frac{h}{\sqrt{b}}x^{\frac{5}{2}}.$$

Läfst man die Radien von 0 bis b wachsen, so erhält man das statische Gesamtmoment des Körpers als

$$h\frac{b^3}{3} - \frac{h}{b^{\frac{1}{2}}}\frac{b^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{7}\right)hb^3 = \tfrac{1}{21}hb^3.$$

Dividiert man dies durch den Körperinhalt $\frac{1}{4}\cdot b^2\pi\frac{h}{5} = \frac{b^2\pi h}{20}$, so folgt als Schwerpunktsabstand $x_s = \frac{20\,b}{21\,\pi}$. Verlegt man endlich das Centrifugalmoment $\frac{b^3h^2}{24}$ nach dem Schwerpunkte, so ist abzuziehen

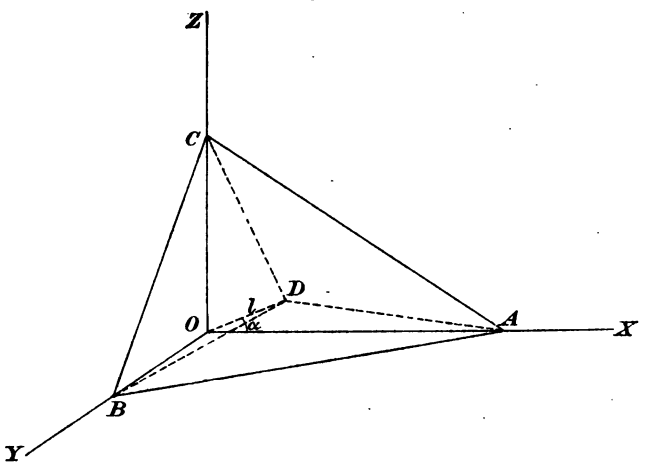
$$x_s \cdot y_s J = \frac{20\,b}{21\,\pi}\cdot\frac{5\,h}{6}\cdot\frac{b^2\pi h}{20} = \tfrac{5}{126}b^3h^2,$$

so dafs man hat $\frac{b^3h^2}{504}$.

406) Das zweite Centralellipsoid.

Bildet man ein Centralellipsoid, dessen Hauptachsen nicht die

Fig. 283.



reciproken Werte der Radien a, b, c, sondern diese selbst sind, so ist seine Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Die Tangentialebene ABC in Figur 283, die sich in einem Punkte

x, y, z der Fläche an diese legen läfst, hat, wie leicht zu zeigen ist, die Gleichung

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1.$$

Setzt man y und z gleich Null, so folgt für A der Abstand $OA = x = \frac{a^2}{x_1}$. Ist OD das Lot vom Nullpunkte auf die Fläche, so wird für dessen Winkel mit der X-Achse $\frac{l}{x} = \frac{lx_1}{a^2} = \cos\alpha$. Ebenso $\cos\beta = \frac{ly_1}{b^2}$, $\cos\gamma = \frac{lz_1}{c^2}$. Daraus kann man bilden

$$a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma = l^2\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2}\right) = l^2,$$

denn weil der gegebene Punkt auf der Fläche des Ellipsoides liegt, ist die letzte Klammer gleich 1. Nach Abschnitt 385 ist aber der Ausdruck links, wenn man wie hier von den Hauptachsen des Centralellipsoides ausgegangen ist, gleich dem Werte des Trägheitsradius für die Achse mit den Winkeln α, β, γ.

Das von Clebsch eingeführte und von Culmann vielfach benutzte zweite Centralellipsoid hat also die Eigenschaft, dafs die Lote vom Nullpunkte auf die Tangentialebenen den Längen der Trägheitsradien für die betreffenden Achsen entsprechen.

Will man demnach zu einer durch O gehenden Geraden das zugehörige axiale Trägheitsmoment eines Körpers finden, so lege man senkrecht gegen die Gerade eine Tangentialebene des Centralellipsoides, diese schneidet von der Geraden die Länge ϱ des gesuchten Trägheitsradius ab.

Denkt man sich also im Schwerpunkte eines Körpers beliebig viele Achsen gezogen, jede von der Länge des Trägheitsradius, und in den Endpunkten Normalebenen errichtet, so umhüllen diese das zweite Centralellipsoid.

Wie die zweite Centralellipse, so ist auch das zweite Centralellipsoid von besonderer Verwendbarkeit. Dabei sind jedoch Kenntnisse über die konfokalen Flächen zweiten Grades nötig, deren drei Gruppen, die der Ellipsoide, der ein- und zweimanteligen Hyperboloide sich rechtwinklig durchsetzen. So hat z. B. Binet (Journ. de l'école polyt. XVI, Seite 41) folgendes bewiesen: Kennt man das zweite Centralellipsoid eines Körpers und sucht man die Richtung der Hauptachsen für einen beliebigen Raumpunkt, so braucht man nur für die drei zum Centralellipsoid konfokalen Flächen, die durch den Punkt gelegt werden können, in diesem die Normalen zu errichten, wodurch man die gesuchten Achsenrichtungen hat. Auch die Längen lassen sich leicht berechnen.

Man vergleiche hierzu die in den Vorbemerkungen besprochene Abhandlung von Clebsch und den betreffenden Abschnitt in den Lehrbüchern der analytischen Mechanik, z. B. bei Schell, ebenso in der Graphischen Statik von Culmann.

Hier ist das zweite Ellipsoid nur der Vollständigkeit wegen genannt.

407) Bemerkungen zur Methode von Reye. Reye hat in Schlömilchs Zeitschrift, Band X, Seite 432 u. s. f. gezeigt, wie man für die Zwecke der Mechanik einen Körper durch einen Massenpunkt ersetzen kann, ähnlich wie in Abschnitt VII F die ebene Fläche durch drei Punkte ersetzt wurde. Auch auf diese ziemlich viel Vorkenntnisse beanspruchenden Dinge soll hier nur hingewiesen werden, da sie über den elementaren Zweck dieses Buches hinausgehen.

408) Anwendbarkeit der Lehre von den körperlichen Trägheits- und Centrifugalmomenten.

a) Berechnung der Energie von Körpern, die sich um eine feste Schwerpunktsachse drehen. Wucht von Schwungrädern, Mühl- und Schleifsteinen. Einfluſs der Schwungmassen auf plötzlich festgeklemmte Wellen oder Achsen. Arbeitsleistung, Überwindung von Reibungswiderständen in Folge der Wucht. Beschleunigte Drehung um solche Achsen. Atwoodsche Fallmaschine ohne und mit Berücksichtigung der Reibung. Probleme der Fadenspannung. — Das Schwungrad als Egalisator der Maschinen bei einer oder mehreren Kurbeln. Stoſs gegen einen sich drehenden Körper, unelastischer und elastischer. Stampfwerke. Centrifugen.

b) Drehung von Körpern um eine beliebige feste Achse. Einwirkung der Centrifugalkräfte und Centrifugalmomente auf die Achse. Energie. Pendelnde Bewegung um eine feste Achse. Lehre vom Schwingungspunkte und von der reduzierten Pendellänge. Anwendung auf horizontal schwingende Magnetnadeln unter dem Einflusse einer richtenden Kraft (Intensitätsmessungen). Das Reversionspendel und die Bestimmung der Schwerebeschleunigung. Unelastischer und elastischer Stoſs gegen so schwingende Körper. Stoſspunkt und Stoſsmittelpunkt. Anwendung auf schwingende Hämmer. Ballistisches Pendel.

c) Berechnung der Energie von Körpern, die sich fortschreitend und drehend bewegen. Herabrollen auf schiefer Ebene unter Berücksichtigung des Widerstandes gegen das Drehen. Beschleunigtes Rollen auf horizontaler Ebene. Verlangsamtes Fallen beim Abwickeln umgeschlungener Fäden von der Achse. Anwendungen der Fadenspannung auf die Reibungstheorie. Grenzwinkel für das alleinige

Rollen auf schiefer Ebene. Rollen und Gleiten zugleich, sowohl auf schiefer als auch auf horizontaler Ebene. Fälle des Hinaufrollens auf schiefer Ebene, sowohl bei geradliniger, als auch bei parabolischer Bahn. Bewegung auf krummer Fläche.

d) Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt. Sphärische Schwingungen des um einen festen Punkt schwingenden physischen Pendels. Gewisse Fälle des Foucaultschen Pendels. Theorie des Fesselschen Apparates und des Kreisels. Anwendungen auf Präcession und Nutation. Unelastischer und elastischer Stofs gegen solche Körper.

e) Drehungsbewegung freier Körper. Freie Drehungsachsen (Hauptachsen des Trägheitsellipsoides). Drehung um ganz beliebige Achsen. Unelastischer und elastischer Stofs gegen solche Körper. Freiwillige Drehungsachse für den ersten Augenblick. Parabolischer Wurf bei gleichzeitigem Drehen. Bewegung und Drehung der Himmelskörper. Bewegung und Drehung im widerstehenden Mittel. Ballistik der Geschosse.

f) Allgemeine Pendelbewegungen beliebig gestalteter Körper auf der Ebene. Herabrollen solcher Körper auf der schiefen Ebene oder auf krummen Flächen. Allgemeine Pendelbewegungen schwimmender Körper, z. B. Schwankungen der Schiffe.

X. Anhang.

Die Schwungradtheorie.

Ein elementares Beispiel zum Abschnitt 43.

---

409) Das nachstehende Beispiel soll zeigen, in wie fruchtbarer Weise die Lehre von den Trägheitsmomenten in der Technik Verwendung finden kann.

Zur Schwungradtheorie gehören zunächst die Aufgaben 90) und 91), bei denen die Gestalt, die Masse bezw. das Gewicht und die Winkelgeschwindigkeit gegeben sind. Eine Reihe weiterer Aufgaben läfst sich anschliefsen. Bei diesen soll bisweilen nur vom Schwungringe, statt vom ganzen Rade die Rede sein, auch soll bisweilen, wie es in der Praxis meist geschieht, einfach der mittlere Radius als mafsgebend angenommen werden, obwohl z. B. bei rechteckigem Querschnitt eigentlich aus

$$\varrho^2 m = m \frac{r^2 + r_1^2}{2}$$

folgen würde

$$\varrho = \sqrt{\frac{r^2 + r_1^2}{2}},$$

nicht aber $\varrho = \frac{r + r_1}{2}$. Bei den Beispielen kommt es hier weniger auf rechnerische Genauigkeit, als auf die Art des Ansatzes und die Aufstellung der Gleichungen an. Die Forderung strenger Genauigkeit giebt dann zu umfangreicheren Übungsaufgaben Anlafs.

Es ist zu raten, stets mit Metern und Tonnen zu rechnen, nicht aber mit Metern und Kilogrammen, weil die letzteren die Einführung von Dezimetern verlangen, so dafs zweierlei Mafse in der Rechnung vorkommen und daher Umrechnungen im Laufe der letzteren nötig werden. Dabei treten bisweilen naheliegende Versehen auf, indem man z. B. versäumt, $g = 9{,}81$ m in $g_1 = 98{,}1$ dcm umzuwandeln.

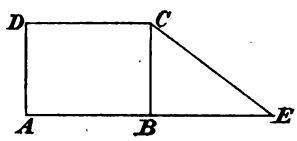
Bei den ersten Aufgaben handelt es sich um die Thätigkeit des Schwungrades als Arbeitsaufsammler, bei den späteren um seine regulierende Thätigkeit bei der Kurbelbewegung. Auf-

gaben über das Zerreifsen der Schwungräder durch Centrifugalkräfte sollen auch zur Sprache kommen, obwohl der Gegenstand schon in Abschnitt 49 behandelt worden ist.

A. Das Schwungrad als Ansammler der Energie.

410) **Aufgabe.** Eine Dampfmaschine leiste bei einer sekundlichen Umdrehung 300 Pferdestärken. Wie schwer müfste der Schwungring von 3 m mittlerem Radius sein, um nach Abstellung der Triebkraft denselben Widerstand 10, 20, 30 Sekunden lang zu überwinden?

Fig. 284.



Auflösung. Die sekundliche Leistung der Maschine beträgt $300 \cdot 75\,\text{mkg} = 22{,}5$ Metertonnen. Das Auslaufdiagramm für 10 Sekunden ist unter der Annahme konstanten Widerstandes ein Dreieck BCE, welches halb so grofs ist, als das entsprechende Rechteck $ABCD$ für eine konstante Maschinenleistung von gleicher Dauer. Der Widerstand kann durch Lote von gleicher Länge, die auf die Diagrammfläche aufzusetzen sind, dargestellt werden. Vom Schwungrad, dessen Arbeitswucht $\frac{T\vartheta^2}{2}$ ist, wird also eine Arbeit von $\frac{10}{2} \cdot 22{,}5$ Metertonnen beansprucht. Es ist demnach zu setzen

$$\frac{T\vartheta^2}{2} = \tfrac{10}{2} \cdot 22{,}5$$

oder

$$\frac{p}{g} \cdot \frac{r^2(2\pi)^2}{2} = \tfrac{10}{2} \cdot 22{,}5,$$

also

$$p = \tfrac{10 \cdot 22{,}5}{4} \cdot \frac{g}{9\pi^2} = \frac{225 \cdot 9{,}81}{36\,\pi^2} = 6{,}2 \text{ Tonnen} = 62 \text{ Doppelzentner.}$$

Für 20 Sekunden sind 12,4, für 30 Sekunden 18,6 Tonnen erforderlich.

Bemerkungen. Für blofse Überschlagungsrechnungen kann man $\frac{9{,}81}{\pi^2} = 1$ setzen, was bei diesem Beispiele 6,25 Tonnen geben würde.

Die allgemeine Formel für diese Art von Aufgaben ergiebt sich bei n sekundlichen Umdrehungen und einer sekundlichen Leistung L der Maschine für eine gegebene Auslaufszeit t aus

$$\frac{T\vartheta^2}{2} = \frac{t}{2} L \quad \text{oder} \quad \frac{p}{g} \frac{r^2(2n\pi)^2}{2} = \frac{t}{2} L$$

als

1) $$p = \frac{gtL}{4r^2n^2\pi^2} = \frac{gtL}{4(rn\pi)^2}.$$

Ist eine der andern Gröfsen als Unbekannte betrachtet, so folgt daraus:

2) $$t = \frac{4p\,(rn\pi^2)}{gL},$$

3) $$L = \frac{4p\,(rn\pi)^2}{gt},$$

4) $$r = \sqrt{\frac{gtL}{4n^2\pi^2p}} = \frac{1}{2n\pi}\sqrt{\frac{gtL}{p}},$$

5) $$n = \frac{1}{2r\pi}\sqrt{\frac{gtL}{p}}.$$

Mit Hülfe dieser Formeln lassen sich entsprechende Aufgaben lösen und an sie allgemeinere Betrachtungen anknüpfen.

411) **Aufgabe.** Eine Maschine leiste bei einer sekundlichen Umdrehung 400 Pferdestärken, ihr Schwungring wiege 20 Tonnen bei 3 m mittlerem Radius. Wie lange kann das Rad nach Abstellung der Triebkraft den gesamten Widerstand noch überwinden?

Auflösung. Die Sekundenleistung der Maschine ist $L = \frac{400 \cdot 75}{1000} = 30$ Metertonnen. Gleichung 2) giebt

$$t = \frac{4 \cdot 20 \cdot 3^2\pi^2}{9{,}81 \cdot 30} = 24{,}14 \text{ Sekunden.}$$

412) **Aufgabe.** Die Leistung einer Maschine bei einer sekundlichen Umdrehung soll bestimmt werden, nachdem sich ergeben hat, dafs das Schwungrad von 20 Tonnen Gewicht und 3 m Radius nach Abstellung der Triebkraft den gesamten Widerstand noch 20 Sekunden lang überwinden kann.

Auflösung. Nach 3) ist

$$L = \frac{4 \cdot 20 \cdot 3^2 \cdot 1^2 \cdot \pi^2}{9{,}81 \cdot 20} = 36{,}22 \text{ mt/s (Metertonnen pro Sekunde),}$$

oder 483 Pferdestärken.

Bemerkung. Da das Absperren des Dampfes Zeit beansprucht, müfste man die Geschwindigkeit zunächst höher treiben, sodann den Dampf absperren und die Zeit des Auslaufs von dem Augenblicke ab zählen, wo das Rad eine Tour in der Sekunde macht.

Die gefundene Leistungsfähigkeit ist gewissermafsen die Bruttoleistung der Maschine, denn sämtliche Widerstände sind darin enthalten, z. B. Kolbenreibung, Stopfbüchsenreibung, Reibung der Geradführungen, sämtliche Zapfenreibungen, die Luftwiderstände und dgl. Um die Nettoleistung zu finden, müfste man nicht nur die Triebkraft abstellen, sondern auch den eigentlichen Widerstand (die Last) auslösen und die Dauer des Auslaufs des Rades und der Maschine beobachten.

Angenommen, es handle sich um 600 Sekunden, dann ist die folgende Aufgabe maſsgebend.

413) **Aufgabe.** Mit wieviel Pferdestärken müſste ein konstanter Widerstand einsetzen, um das obige Rad in der Auslaufszeit von 600 Sekunden zur Ruhe zu bringen?

Auflösung. Gleichung 3) giebt

$$L_1 = \frac{4 \cdot 20 \cdot 3^2 \cdot 1^2 \cdot \pi^2}{9{,}81 \cdot 600} = 1{,}208 \text{ Metertonnen auf die Sekunde}$$

oder 16,1 Pferdestärken.

Die Nettoleistung der Maschine würde also sein 483 — 16,1 $= \sim 477$ Pferdestärken.

In dem Effektverlust von 16,1 Pferdestärken ist jeder Widerstand enthalten, auch der Einfluſs der etwa hin- und herschwingenden Teile. Die Annahme, daſs der Widerstand konstant sei, ist z. B. im Hinblick auf den Luftwiderstand nicht ganz richtig, das Resultat ist aber für praktische Zwecke hinweisend genau und kann zur Ergänzung der Ergebnisse von Indikator- und Bremsversuchen dienen. In solcher Weise ist man auch imstande, den Arbeitsaufwand, den Lochmaschinen, Pressen u. dgl. für ihre Funktionen erfordern, versuchsweise festzustellen. Da theoretische Vorhersagungen hier kaum möglich sind, müssen Experimente die nötige Unterlage geben.

414) **Aufgabe.** Mit wieviel Pferdestärken müſste ein konstanter Widerstand einsetzen, um obiges Rad in einer Sekunde oder in $\frac{1}{10}$ Sekunde, oder in $\frac{1}{100}$ Sekunde zur Ruhe zu zwingen.

Auflösung. Für eine Sekunde bedarf es einer Anfangsarbeit von $L = \frac{4p3^2 1^2 \pi^2}{g \cdot 1} = 724{,}4$ mt/s oder 9640 Pferdestärken, bei $\frac{1}{10}$ Sekunde das 10-fache, bei $\frac{1}{100}$ Sekunde das 100-fache.

Bemerkung. Nach den in Nr. 97, 98 und 101 behandelten Formeln kann aber die Schwungradwelle aus Gründen der Festigkeit nur eine begrenzte Anzahl von Pferdestärken übertragen, z. B. die Anzahl

$$N = \frac{\pi n S d^3}{16 \cdot 716\,200} \quad \text{bezw.} \quad N = \frac{G n \pi^2 d^4}{4 \cdot 360 \cdot 1000 \cdot 16 \cdot 716\,200},$$

daraus geht also hervor, daſs die Triebwelle durch Torsion zerbrechen muſs, wenn das Stillstehen in allzukurzer Zeit geschehen soll. Selbstverständlich können vorher die zu schwach gebauten Radarme nachgeben, oder der Keil, mittels dessen die Nabe auf die Triebwelle gekeilt ist, wird vorher durch Abscherung beseitigt. Letzteres

würde noch das am wenigsten schädlich wirkende sein, und deshalb pflegt man den Keil nicht allzuwiderstandsfähig zu machen.

Bezeichnet man den Widerstand, der das Rad schnell zur Ruhe bringen soll, kurzweg als Stofs, so folgt aus Gleichung 3) dafs die Bruchgefahr umgekehrt proportional der Stofsdauer ist. Setzt man in abstrakter Weise $t = 0$, so würde $L = \infty$, das Rad oder die Welle also unter jeder Bedingung zertrümmert werden.

415) **Aufgabe.** Ein Schwungring vom spez. Gewichte p' mit den Radien r und r_1, der durch Rotation einer Rechtecksfläche mit den Seiten $h = r - r_1$ und d entstanden gedacht wird, hat bei n Umdrehungen in der Sekunde welche Arbeitswucht in sich?

Auflösung. Das polare Trägheitsmoment der Ringfläche ist

$$\frac{r^4 - r_1^4}{2}\pi = \frac{r^2 + r_1^2}{2}(r^2 - r_1^2)\pi = F\frac{r^2 + r_1^2}{2}.$$

Hier also wird

$$T = m\frac{r^2 + r_1^2}{2} = \frac{p}{g}\frac{r^2 + r_1^2}{2} = \frac{(r^2 - r_1^2)\pi p'}{g}d\frac{r^2 + r_1^2}{2} = \frac{(r^4 - r_1^2)\pi p' d}{2g},$$

also

$$A = T\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{(r^4 - r_1^4)\pi p'}{2g}d\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{(r^4 - r_1^4)\pi p' d\, 4n^2\pi^2}{4g} = \frac{(r^4 - r_1^4)\pi^2 p' d\, n^2}{g}$$

Metertonnen.

Ist z. B. $r = 2\,\mathrm{m}$, $r_1 = 1{,}6\,\mathrm{m}$, $d = 0{,}2\,\mathrm{m}$, $p' = 7{,}5\,\mathrm{m}$, so würde sein

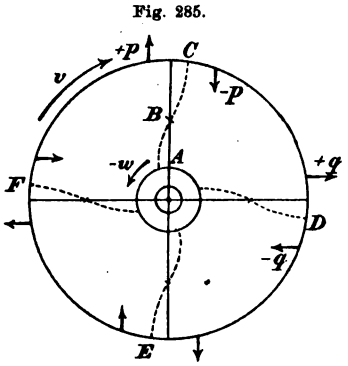
$$A = \frac{(2^4 - 1{,}6^4)\,\pi^2 \cdot 7{,}5 \cdot 0{,}2}{9{,}81}n^2 = 44{,}786\,n^2 \text{ Metertonnen}$$

oder $A = 44\,786\,n^2$ mkg. Also bei 1, 2, 3 Umdrehungen bezw. 44 786 mkg, 179 144 mkg, 403 074 mkg.

Die plötzliche Herabsetzung der Geschwindigkeit von 3 auf 2 sekundliche Umgänge würde schon 403 074 — 179 144 = 223 930 mkg. Zerstörungsarbeit in die Maschinerie werfen. Stofsweise Verlangsamungen also, wie sie beim Walzen, Bohren, Pressen häufig eintreten, müssen bei der Konstruktion berücksichtigt werden. Ebenso würden Stöfse eintreten, wenn man Schleifsteine, Mühlsteine oder vollständige Transmissionsbetriebe durch plötzlich wirkende Einrückkuppelungen in sofortige Bewegung versetzen wollte. Der Vorgang beim Zerbrechen der Radarme oder des Kranzes ist in Figur 285 dargestellt. Dreht sich das Rad in der Richtung v und ist $-w$ die plötzlich hemmend wirkende Gegenkraft, so wird jeder Radarm ABC

gebogen, wie ein beiderseits eingespannter Träger, bei dem A und C die am meisten gefährdeten Stellen sind, während die Biegungsspannung im Wendepunkte B gleich Null ist. Die Biegung des Radarmes bei C wirkt auf den Kranz in Form eines Kräftepaares, welches durch die Kräfte $+p$ und $-p$ angedeutet ist. Entsprechende Komponenten der Kräfte $-p$ und $+q$ können als ein Kräftepaar betrachtet werden, welches den Quadranten (oder Sektor) CD linksdrehend zerbrechen will. Dabei sind C und D und zwei zwischen C und D liegende Punkte als besonders gefährdete Stellen aufzufassen.

Fig. 285.



Die Abnahme der Arbeitswucht des auslaufenden Schwungrades geschieht unter Voraussetzung konstanten Widerstandes nach Maßgabe des Fallgesetzes und der Zerlegung des Diagramms in Teiltrapeze. Dauert der Auslauf z. B. 10 Sekunden, so wird nach dem Gesetze der ungeraden Zahlen von Sekunde zu Sekunde $\frac{19}{100}, \frac{17}{100}, \frac{15}{100}, \frac{13}{100}, \ldots \frac{5}{100}, \frac{3}{100}, \frac{1}{100}$ der Energie aufgebraucht.

416) **Aufgabe.** Eine Maschine leiste bei einer sekundlichen Umdrehung 400 Pferdestärken. Der Schwungring soll 20 Tonnen wiegen und imstande sein, den gesamten Widerstand nach Abstellung der Triebkraft 40 Sekunden lang zu überwinden. Wie grofs ist der mittlere Radius zu nehmen?

Auflösung. Aus Gleichung 4) folgt

$$r = \frac{1}{1.\pi}\sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 40 \cdot 80}{4 \cdot 20}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{147{,}15} = 3{,}861 \text{ m}.$$

Den Aufgaben über den Auslauf der Maschine entpsrechen solche über den Anlauf.

417) **Aufgabe.** Eine Maschine leiste bei 3 Touren in der Sekunde 400 Pferdestärken. Wieviel Zeit hat sie nötig, beim Blindgange das Schwungrad — abgesehen von den Reibungswiderständen — in diese Geschwindigkeit zu versetzen, wenn dieses bei 3 m Radius 20 Tonnen wiegt?

Auflösung. Auch hier ist, wie aus der Gleichung

$$\frac{tL}{2} = \frac{T\vartheta^2}{2}$$

hervorgeht, die Gleichung 2) maſsgebend. Man erhält

$$t = \frac{4 \cdot 20\,(3 \cdot 3\pi)^2}{g \cdot 30} = 217{,}2 \text{ Sekunden.}$$

Dies ist 9-fache des Resultates der Aufgabe 411, was sich naturgemäſs daraus erklärt, daſs t dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit proportional ist.

B. Schwungrad und Centrifugalkraft.

418) Schwungräder werden in der Regel durch Betriebsstockungen in der oben erwähnten Weise zerstört. Bei sehr groſsen Geschwindigkeiten, z. B. beim Durchgehen der unbelasteten Maschine, deren Absperrventil nicht in Ordnung ist, kann die Zerstörung auch durch die Centrifugalkraft erfolgen. Sieht man von den Radarmen vorläufig ab, so handelt es sich um das Abreiſsen der einen Kranzhälfte von der andern. Maſsgebend ist also die im Schwerpunkte S_1 vereinigt gedachte Masse jeder Hälfte. (Vgl. Figur 53.)

Ist d die Dicke des Rades mit rechteckigem Hauptschnitt, sind r und r_1 die Radien, und ist p' das spezifische Gewicht, so handelt es sich um die Masse $\frac{p}{g} = \frac{\pi}{2}(r^2 - r_1^2)\,d\,\frac{p}{g}$ und um Centrifugalkräfte $m\varrho\,(2n\pi)^2$, wo ϱ der Schwerpunktsabstand $\frac{4\,(r^3 - r_1^3)}{3\pi\,(r^2 - r_1^2)}$, n die Tourenzahl für die Sekunde bedeutet, also um

$$K = \frac{\pi\,(r^2 - r_1^2)\,dp'}{2g}\,\frac{4\,(r^3 - r_1^3)}{3\pi\,(r^2 - r_1^2)}\,(2n\pi)^2 = \frac{2\,dp'\,(r^3 - r_1^3)\,(2n\pi)^2}{3g}.$$

419) **Aufgabe.** Wie groſs ist die Centrifugalkraft, die einen einfach gestalteten Schwungring von den nachstehenden Dimensionen bei einer, zwei, drei Touren in der Sekunde zerreiſsen will? $r = 3{,}3$ m, $r_1 = 3$ m, $d = 0{,}3$ m, $p' = 7{,}5$.

Auflösung.

$$K_1 = \frac{2 \cdot 0{,}3 \cdot 75\,(3{,}3^3 - 3^3)\,4\pi^2}{3 \cdot 9{,}81} = \frac{6\pi^2\,(3{,}3^3 - 3^3)}{9{,}81} = \frac{53{,}62\,\pi^2}{9{,}81} = 53{,}94 \text{ Tonnen.}$$

Bei 2 Touren handelt es sich um das 4-fache, bei 3 Touren um das 9-fache u. s. w.

Bemerkung. Die gesamte Rifsfläche ist das doppelte Rechteck aus d und $(r - r_1)$, also gleich $2\,d(r - r_1) = 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}18$ qm $= 180\,000$ qmm. Von der Spannung 53 940 kg kommen also auf jedes Quadratmillimeter $0{,}2997 = \sim 0{,}3$ kg. Der Tragmodul des Gufseisens ist 7,5 kg. Wann wird er erreicht? Bei n Touren

handelt es sich um $n^2 \cdot 0{,}3$ kg Spannung, aus $n^2 \cdot 0{,}3 = 7{,}5$ folgt $n^2 = 25$ und $n = 5$. Bei 5 Touren also wird bereits die Elastizitätsgrenze erreicht. Wird der Bruchmodul als 11 angenommen, so erfolgt das Zerreifsen bei

$$n = \sqrt{\frac{11}{0{,}3}} = 6{,}055 \text{ Umdrehungen in der Sekunde.}$$

Die Annahme, dafs der Zug sich gleichmäfsig über die ganze Rifsfläche verbreitet, ist nicht ganz richtig, aber für praktische Zwecke zulässig.

Bei anderer Gestaltung des Hauptschnittes kommen die Formeln des Abschnittes 49 zur Geltung.

Will man direkt die Spannung erhalten, so ergiebt sich in Tonnen auf das Quadratmeter die Zugspannung

$$S_1 = \frac{2\,d p' \left(r^3 - r_1^3\right)(2\,n\pi)^2}{3\,g\,2\,d\,(r - r_1)} = \frac{p'\left(r^2 + r\,r_1 + r_1^2\right)(2\,n\pi)^2}{3\,g}.$$

Multiplikation mit 1000 und Division durch 1 000 000 reduziert diese Spannung auf Kilogramm pro Quadratmillimeter, so dafs man dann hat

$$S = \frac{p'\left(r^2 + r\,r_1 + r_1^2\right)(2\,n\pi)^2}{3000\,g},$$

im Beispiele also

$$S = \frac{7{,}5\,(10{,}89 + 9{,}9 + 9)\,4\,\pi^2}{3000 \cdot 9{,}81} = 0{,}2997 \text{ kg/qmm.}$$

Bei den grofsen z. B. in Drahtwalzwerken gebräuchlichen Umdrehungszahlen sind nach Obigem gufseiserne Räder von grofsen Dimensionen unbrauchbar. Sie werden dort durch schmiedeeiserne ersetzt. Bei dem Schrägwalzverfahren (Mannesmann) hat man die Sicherheit noch durch Umspinnung mit Draht zu vergröfsern gesucht.

C. Die ausgleichende Arbeit des Schwungrades bei der einfachen Kurbelbewegung.

420) Der Kurbelradius der Maschine sei r, der Widerstand, auf den Radius r reduziert, sei q, also qr das Moment des zu überwältigenden Widerstandes. Man denke sich z. B. die Last q an einem Seile wirkend, welches um die Peripherie des Kurbelkreises geschlungen ist. Die Richtung der Pleuelstange werde stets als horizontal angenommen, was bei der sogenannten Kurbelschleife durchaus richtig, bei Pleuelstangen gewöhnlicher Art angenähert richtig ist, sobald sie mehr als die 5-fache Länge des Kurbelradius haben. Die treibende Maschine werde, wie überall in den Lehrbüchern, zunächst als Voll-

druckmaschine angenommen, so dafs es sich um eine konstante Triebkraft p handelt. T sei das Trägheitsmoment der gesamten Schwungmasse (zu der im angenommenen Beispiele auch die am Seile hängende Last q gehören müfste, wenn sie nicht vollständig abstrakt als Kraft aufgefafst wird).

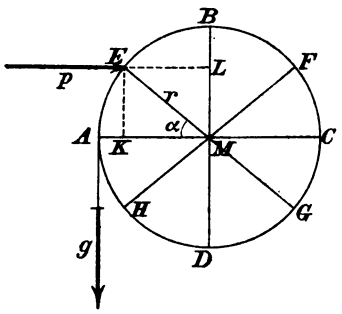
421) **Aufgabe.** Wie grofs mufs die Triebkraft p theoretisch sein, damit der Gang der Maschine ein periodisch regelmäfsiger werde?

Auflösung. Bei jeder Umdrehung ist die Arbeit $q \cdot 2r\pi$ zu leisten. Ebenso viel Arbeit mufs die Dampfmaschine hergeben*), wenn die Maschine nicht in dauernde Beschleunigung oder in Verlangsamung geraten soll. Der Hin- und Rückgang des Kolbens giebt den Weg $4r$, also ist $p \cdot 4r$ die entsprechende Arbeit der Maschine. Aus $p \cdot 4r = q \cdot 2r\pi$ folgt

1) $$p = \frac{\pi}{2} q = 1{,}5708\, q.$$

Die Triebkraft ist also mehr als das $1\frac{1}{2}$fache der Last, und zwar deshalb gröfser, weil ihr Hebelarm zwischen den Werten Null und r schwankt, während der Hebelarm der Last konstant gleich r bleibt. Bemerkenswert ist, dafs die Gröfse von r für das Resultat gleichgültig ist.

Fig. 286.



422) **Aufgabe.** In welchen Stellungen ist das statische Moment der Kraft gleich dem der Last?

Auflösung. Für die beliebige Stellung α (Fig. 286) ist das statische Moment der Kraft $pr \sin\alpha$, das der Last ist stets qr. Setzt man beide gleich, so ist

$$pr \sin\alpha = qr$$

oder

$$\frac{\pi}{2} qr \sin\alpha = qr.$$

Daraus folgt

$$\sin\alpha = \frac{2}{\pi},$$

d. h.

2) $$\alpha = 39^0\, 32'\, 30''.$$

*) Der Satz von der Erhaltung der Arbeit bei diesem Probleme ist vorher in bekannter Weise elementar zu beweisen.

Dasselbe gilt von den Stellungen

$$-39^0\,32'\,30''\text{ und }+140^0\,27'\,30''.$$

Diese Stellungen sind die einzig möglichen für das Gleichgewicht. Bleibt die Maschine zwischen H und E oder zwischen F und G stehen, so ist es der Dampfkraft p nicht möglich, das Moment der Last zu überwinden und die Maschine in Gang zu setzen. Entweder mufs die Last vermindert oder das Rad mit besonderen Mitteln über die Minimalstellen hinaus getrieben werden, d. h. mindestens $39^0\,32\frac{1}{2}'$ über die Totpunktstellung hinaus. Die Vorrichtungen, die dem Maschinenwärter diese Arbeit ermöglichen, sind wohl allgemein bekannt.

Folgerungen. Von H bis E ist das Moment der Triebkraft zu klein, von E bis F ist es zu grofs, von F bis G zu klein, von G bis H zu grofs. Demnach herrscht Verlangsamung des Maschinenganges von H bis E, Beschleunigung von E bis F, Verlangsamung von F bis G, Beschleunigung von G bis H. Folglich: Das Minimum der Drehungsgeschwindigkeit befindet sich bei E und G, das Maximum bei F und H. Die beiden Minima werden sich als gleich herausstellen, ebenso die Maxima.

423) **Aufgabe.** Die Winkelgeschwindigkeit in der Totpunktstellung sei ϑ_1. Wie grofs ist die Winkelgeschwindigkeit ϑ für jede beliebige Stellung α des Kurbelradius?

Auflösung. Geht in der Figur der Endpunkt des Radius von A nach E, so ist die Last um den Bogen $AE = r \cdot \widehat{\alpha}$ gehoben. Die geleistete Arbeit ist also $qr\widehat{\alpha}$, oder, wie aus der Proportion $\alpha : \widehat{\pi} = \alpha^0 : 180^0$ folgt, geleistete Arbeit $= qr\pi\frac{\alpha^0}{180^0}$, wobei man die Gradzeichen dulden möge, um Verwechselungen zu vermeiden.

Der Weg des Dampfkolbens aber ist AK, die aufgewandte Arbeit der Maschine also $p \cdot AK$, oder, da $p = \frac{\pi}{2}q$ und $AK = r(1 - \cos\alpha)$ ist, aufgewandte Arbeit $= \frac{\pi}{2}qr(1 - \cos\alpha)$. Folglich Kraftarbeit — Lastarbeit

$$= \frac{\pi}{2}qr(1 - \cos\alpha) - qr\pi\frac{\alpha^0}{180^0} = qr\pi\left[\tfrac{1}{2}(1 - \cos\alpha) - \frac{\alpha^0}{180^0}\right].$$

Dieser Arbeitsüberschufs, der allerdings positiv und negativ sein kann, wirft sich in die Schwungmassen und bringt deren Arbeitswucht von $\frac{T\vartheta_1^2}{2}$ auf $\frac{T\vartheta^2}{2}$, so dafs sein mufs:

$$\frac{T}{2}(\vartheta^2 - \vartheta_1^2) = qr\pi\left[\tfrac{1}{2}(1 - \cos\alpha) - \frac{\alpha^0}{180^0}\right].$$

Hieraus ergiebt sich

3) $$\vartheta^2 = \vartheta_1^2 - \frac{2qr\pi}{T}\left[\frac{\alpha^0}{180^0} - \tfrac{1}{2}(1 - \cos\alpha)\right],$$

woraus sich die Winkelgeschwindigkeit ϑ für jedes α leicht berechnet.

Setzt man für α den Supplementwinkel $180^0 - \alpha$ ein, so verwandelt sich die Formel in

3*) $$\vartheta^2 = \vartheta_1^2 + \frac{2qr\pi}{T}\left[\frac{\alpha^0}{180^0} - \tfrac{1}{2}(1 - \cos\alpha)\right],$$

so dafs die Summe der Quadrate der Winkelgeschwindigkeiten für Supplementstellungen stets gleich $2\vartheta_1^2$ ist. Daraus folgt, dafs in den Stellungen A, B, C und D, d. h. für 0^0, 90^0, 180^0 und -90^0 die Winkelgeschwindigkeit gleich ϑ_1 ist, was sich bei Einsetzung dieser Winkel auch bestätigt. In der statisch günstigsten Stellung ist also die Geschwindigkeit dieselbe, wie in der Totpunktstellung.

Auch für die Minimal- und Maximalstellung ist die Summe der Quadrate der Winkelgeschwindigkeiten gleich $2\vartheta_1^2$, also

$$\vartheta_{max}^2 + \vartheta_{min}^2 = 2\vartheta_1^2,$$

oder

4) $$\vartheta_1^2 = \frac{\vartheta_{max}^2 + \vartheta_{min}^2}{2}.$$

Folglich: Das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit in der Totpunktstellung ist das arithmetische Mittel der Quadrate der Maximal- und Minimalgeschwindigkeit.

424) Noch klarer tritt das Resultat hervor, wenn man beide Seiten der Gleichung 4) mit $\frac{T}{2}$ multipliziert. Es ergiebt sich

5) $$\frac{T\vartheta_1^2}{2} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{T}{2}\vartheta_{max}^2 + \frac{T}{2}\vartheta_{min}^2\right],$$

oder

5*) $$A_1 = \frac{A_{max} + A_{min}}{2},$$

d. h. die Arbeitswucht der Schwungmassen in der Totpunktstellung ist das arithmetische Mittel der Arbeitswuchten in den Stellungen der Maximal- und Minimalgeschwindigkeit.

Dasselbe gilt von den Stellungen $\pm 90^0$. Nach den Bemerkungen zu den Gleichungen 3) ist A_1 auch das arithmetische Mittel der Arbeitswuchten für jedes Paar der dort besprochenen Supplementstellungen.

425) **Aufgabe.** Die Maximal- und die Minimalgeschwindigkeit sollen aus der Totpunktgeschwindigkeit berechnet werden.

Auflösung. Beide berechnen sich nach 3) und 3*) aus der Gleichung

$$\vartheta^2 = \vartheta_1^2 \pm \frac{2r\pi q}{T}\left[\frac{39^0\,32'\,30''}{180^0} - \frac{1}{2}(1 - \cos 39^0\,32'\,30'')\right],$$

also:

6)
$$\begin{cases} \vartheta_{max} = \sqrt{\vartheta_1^2 + \frac{0{,}6614\,qr}{T}}, \\ \vartheta_{min} = \sqrt{\vartheta_1^2 - \frac{0{,}6614\,qr}{T}}. \end{cases}$$

Folgerungen: Die gesamte Schwankung ist:

$$\vartheta_{max} - \vartheta_{min} = \sqrt{\vartheta_1^2 + \frac{0{,}6614\,qr}{T}} - \sqrt{\vartheta_1^2 - \frac{0{,}6614\,qr}{T}}.$$

Aus 6) folgt

7)
$$\vartheta_{max}^2 - \vartheta_{min}^2 = 1{,}3228\,\frac{qr}{T}$$

(was unabhängig von ϑ_1 ist), oder wenn man beiderseits mit $\frac{T}{2}$ multipliziert:

$$\frac{T}{2}\vartheta_{max}^2 - \frac{T}{2}\vartheta_{min}^2 = 0{,}6614\,qr,$$

d. h.

8)
$$A_{max} - A_{min} = 0{,}6614\,qr = 0{,}6614\,M.$$

Also: Die Arbeitswucht, die von den Schwungmassen in der Beschleunigungsperiode aufgenommen und in der Verlangsamungsperiode wieder abgegeben wird, ist gleich dem 0,6614-fachen des Lastmomentes, oder etwa gleich $\frac{2}{3}$ des Lastmomentes. Die Gröfse der Schwungmasse, die Gröfse ihres Trägheitsmomentes, die mittlere Geschwindigkeit und die mittlere Arbeitswucht der Schwungmasse sind dabei vollständig gleichgültig. Die Arbeitsaufnahme eines Schwungrades ist also nur von dem Lastmomente abhängig.

426) Soll das Schwungrad über die Minimalstelle wirklich hinauskommen, so muſs nach Gleichung 7), in der für ϑ_{min} der Grenzwert Null einzusetzen ist,

$$\vartheta_{max} > \sqrt{1{,}3228\,\frac{qr}{T}}$$

sein. Die kleinste denkbare Maximalgeschwindigkeit ist also

$$\vartheta'_{max} = \sqrt{1{,}3228\,\frac{qr}{T}}.$$

Die kleinste denkbare Totpunktgeschwindigkeit ist also nach 6) zu berechnen aus

$$\vartheta_1^2 = \vartheta'^2_{max} - 0{,}6614\,\frac{qr}{T} = 1{,}3228\,\frac{qr}{T} - 0{,}6614\,\frac{qr}{T}.$$

Daſs sie mindestens

$$\vartheta_1 = \sqrt{0{,}6614\,\frac{qr}{T}}$$

sein muſs, ergiebt sich auch aus der zweiten der Formeln 6), die sonst Imaginäres ergeben würde.

Man erkennt daraus, daſs bei gegebenem Lastmoment und gegebener Schwungmasse die Maximalgeschwindigkeit und ebenso die Totpunktgeschwindigkeit unter gewisse Minimalwerte nicht herabsinken dürfen. Will man jedoch mit geringerer Maximalgeschwindigkeit arbeiten, so muſs man das Trägheitsmoment T der Schwungmasse vergröſsern, denn das gestattete Minimum ist umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Trägheitsmomente. Schon daraus wird man den Schluſs ziehen, daſs man groſse Schwungmassen anwenden muſs, wenn man der Maschine möglichst geringe Tourenzahl bei einiger Regelmäſsigkeit des Ganges geben will.

Man sieht ferner, daſs die gröſste mögliche Schwankung diejenige zwischen dem kleinsten Maximalwerte und Null sein wird, also $\sqrt{1{,}3228\,\frac{qr}{T}}$, was sich später noch deutlicher zeigen wird.

427) In der Technik berechnet man die Schwankungen vom Mittelwerte der Maximal- und Minimalgeschwindigkeit aus, der ϑ_m sein mag. Dem wird genügt, wenn man

9)
$$\begin{cases} \vartheta_{max} = \vartheta_m + \frac{\vartheta_m}{n} = \vartheta_m\left(1 + \frac{1}{n}\right), \\ \vartheta_{min} = \vartheta_m - \frac{\vartheta_m}{n} = \vartheta_m\left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

setzt, woraus eben folgt

$$\vartheta_m = \frac{\vartheta_{max} + \vartheta_{min}}{2}.$$

Man bezeichnet dann $\frac{1}{n}$ als die Schwankung (vom Mittelwerte aus gerechnet) und n als den Schwankungskoeffizienten.

Durch Addition und Subtraktion folgt aus den Gleichungen 9)

$$\vartheta_{max} + \vartheta_{min} = 2\,\vartheta_m,$$

$$\vartheta_{max} - \vartheta_{min} = \frac{2\,\vartheta_m}{n},$$

und durch Multiplikation erhält man aus den letzteren

10) $$\vartheta^2_{max} - \vartheta^2_{min} = \frac{4\,\vartheta^2_m}{n}.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit 7), so findet man

$$\frac{4\,\vartheta^2_m}{n} = 1{,}3228\,\frac{qr}{T},$$

oder

11) $$\frac{\vartheta^2_m}{n} = 0{,}3307\,\frac{qr}{T} = 0{,}3307\,\frac{M}{T}.$$

Sind also gegeben das Widerstandsmoment M, das Trägheitsmoment T und die Mittelgeschwindigkeit $\vartheta_m = \frac{\vartheta_{max} + \vartheta_{min}}{2}$, so läfst sich die Schwankung $\frac{1}{n}$ leicht berechnen.

428) Für den Techniker ist die wichtigste Aufgabe die, für eine zulässige Schwankung $\frac{1}{n}$ die dazu nötige Schwungmasse zu bestimmen. Ihr Trägheitsmoment ergiebt sich aus

11*) $$T = \frac{0{,}3307\,Mn}{\vartheta^2_m}.$$

Aus

11**) $$\frac{1}{n} = \frac{0{,}3307\,M}{\vartheta^2_m\,T}$$

folgt ohne weiteres, dafs die Schwankung umgekehrt proportional dem Trägheitsmomente und dem Quadrate der Mittelgeschwindigkeit ϑ_m ist, welche letztere jedoch nicht mit der mittleren Geschwindigkeit in Bezug auf die Zeit verwechselt werden darf. Man ist trotzdem berechtigt, daraus abzulesen, dafs man bei grofser Umdrehungsgeschwindigkeit auch mit einem

kleineren Schwungrade grofse Regelmäfsigkeit des Ganges erzielen kann. Der Ausschlag $\frac{\vartheta_m}{n}$ wird in jedem Falle $\frac{0{,}3307\,M}{\vartheta_m T}$.

429) **Aufgabe.** Wie unterscheidet sich die Mittelgeschwindigkeit ϑ_m von der Totpunktgeschwindigkeit ϑ_1?

Auflösung. Es war

$$\vartheta_1^2 = \frac{\vartheta_{max}^2 + \vartheta_{min}^2}{2} = \frac{\vartheta_m^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \vartheta_m^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}{2} = \vartheta_m^2\left[1+\frac{1}{n^2}\right],$$

also

12) $$\vartheta_1 = \vartheta_m\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}.$$

Die Totpunktgeschwindigkeit ist also stets ein wenig gröfser, als der Mittelwert ϑ_m. Ist z. B. die Schwankung, von diesem aus gerechnet, $\frac{1}{50}$, so ist

$$\vartheta_1 = \vartheta_m\sqrt{1+\tfrac{1}{2500}} = \sim \vartheta_m\left(1+\tfrac{1}{5000}\right) = \sim 1{,}0002\,\vartheta_m.$$

Bei grofsen Geschwindigkeiten darf man also Totpunktgeschwindigkeit und Mittelgeschwindigkeit zur Not mit einander vertauschen, bei geringer Umdrehungsgeschwindigkeit aber nicht. Die Unterschiede können sogar sehr grofs werden. Bei der kleinsten möglichen Maximalgeschwindigkeit und der zugehörigen Minimalgeschwindigkeit Null z. B. ist die Mittelgeschwindigkeit $\vartheta_m = \frac{1}{2}\sqrt{1{,}3228\frac{qr}{T}}$, die Totpunktgeschwindigkeit dagegen $\vartheta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 1{,}3228\frac{qr}{T}}$, so dafs sich beide verhalten wie $\frac{1}{2} : \sqrt{\frac{1}{2}}$, oder wie $1 : \sqrt{2}$, also etwa wie $1 : 1{,}41$, wobei die Vertauschung doch wohl etwas bedenklich sein dürfte.

Diese Bemerkung soll nur dazu dienen, auf die Unzulässigkeit des Verfahrens aufmerksam zu machen, dessen sich einige Lehrbücher bedienen, wenn sie solche Vertauschungen ohne jede Vorsichtsmafsregel vornehmen.

Nach Gleichung 11**) wird nun allerdings bei grofsem ϑ_m die Schwankung $\frac{1}{n}$ sehr klein, der Unterschied zwischen mittlerer Geschwindigkeit, Mittelgeschwindigkeit und Totpunktgeschwindigkeit ebenfalls klein, jedenfalls weit kleiner als Unterschied $\frac{\vartheta_m}{n}$ oder $\frac{0{,}3307\,M}{\vartheta_m T}$, der den Gesamtausschlag vom Mittelwerte aus bezeichnet. Bei gröfserer Umdrehungszahl also wird es für technische Zwecke berechtigt

sein, ϑ_1, ϑ_m und die mittlere Geschwindigkeit in Bezug auf die Zeit etwa ϑ_0, mit einander zu verwechseln. Dann ist man noch in der Lage, Pferdestärken und Tourenzahl (pro Minute) einzuführen.

430) **Aufgabe.** Welche Beziehung findet zwischen dem statischen Momente des Widerstandes $M = qr$, der Anzahl von Pferdestärken N und der Tourenzahl m statt?

Auflösung. Bei jeder Umdrehung wird die Last q um $2r\pi$ gehoben, also die Arbeit $2r\pi q$ geleistet, die Arbeit pro Sekunde ist also bei m minutlichen Umdrehungen $\frac{2r\pi qm}{60}$, also, wenn z. B. in Meterkilogrammen gerechnet war, $N = \frac{2r\pi qm}{60 \cdot 75}$ Pferdestärken. Demnach ist das Lastmoment

13) $$M = qr = \frac{75 \cdot 60 N}{2\pi m}$$

zu setzen. Die mittlere Umdrehungsgeschwindigkeit aber ist jetzt

$$\vartheta^0 = \frac{2r\pi m}{60}.$$

Darf man nun ϑ_m und ϑ_0 verwechseln, so geht Gleichung 11**) über in

$$\frac{1}{n} = \frac{0{,}3307 \, \frac{75 \cdot 60 \cdot N}{2\pi m}}{\frac{4r^2\pi^2m^2}{3600} \cdot T},$$

woraus folgt:

14) $$n = \frac{Tm^3}{21\,600 N},$$

oder auch

15) $$T = \frac{21\,600 Nn}{m^3}.$$

Dies ist die auf den technischen Hochschulen gebräuchliche Formel*). Schon sie ist streng genommen nur eine Annäherungsformel für den

*) Die höhere Rechnung würde für die halbe Umlaufszeit die Formel

$$t = \frac{1}{\vartheta_1} \int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 + \frac{2qr}{T\vartheta_1^2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cos\alpha - \widehat{\alpha}\right)}}$$

ergeben. Auf die Berechnung der wirklichen mittleren Geschwindigkeit $\vartheta_m = \frac{\pi}{t}$ wird jedoch auch auf der Hochschule wegen der Schwierigkeit der Auswertung des Integrals verzichtet. Vergl. meinen Aufsatz in der Zeitschr. d. V. deutscher Ingenieure, Bd. 34, S. 30 u. s. w.

Fall grofser Geschwindigkeiten. Weit komplizierter würde die Rechnung werden, wenn man statt der Volldruckmaschine die Expansionsmaschine behandeln wollte. Immerhin würde die Berechnung von hohem Interesse sein, sowohl bei Zugrundlegung des Mariotteschen Diagramms (gleichseitige Hyperbel) als des adiabatischen Diagramms für atmosphärische Luft bezw. gesättigte Dämpfe. Hier sind graphische Darstellungen vorzuziehen, wie sie am Schlusse zur Sprache kommen sollen.

431) Aus Gleichung 14) läfst sich folgendes ablesen:

Die Schwankung der Maschine ist direkt proportional der Anzahl der Pferdestärken, umgekehrt proportional der Schwungmasse und umgekehrt proportional der dritten Potenz der Tourenzahl.

Was diese dritte Potenz anbetrifft, so scheint darin ein Widerspruch gegen die Formel 11) zu liegen, nach der die Schwankung dem Quadrate der Geschwindigkeit, also auch dem der Tourenzahl, umgekehrt proportional war. Der Widerspruch ist jedoch nur ein scheinbarer, denn wenn die Maschine doppelt so schnell (bei gleicher Belastung) geht, wird auch die Anzahl der Pferdestärken verdoppelt, so dafs der Faktor $\frac{1}{2^2}$ auf $\frac{2}{2^3}$ oder $\frac{1}{2^2}$ reduziert wird. Man erkennt wiederum, dafs man bei doppelter Umdrehungsgeschwindigkeit (und doppelter Anzahl der Pferdestärken) mit dem vierten Teile des Trägheitsmomentes dieselbe Regelmäfsigkeit erzielt.

Darf man das Trägheitsmoment der Last q vernachlässigen, was stets gestattet ist, sobald es sich um einen nur passiv wirkenden Widerstand handelt (z. B. um die Reibung, die niemals eine entgegengesetzte Bewegung der Maschine aktiv hervorrufen kann) und will man beim Schwungrade nur den Ring, nicht aber die Radarme, die Achse und die Nabe berücksichtigen, so kann man Aufgaben der folgenden Art ohne weiteres lösen:

432) **Aufgabe.** Ein Schwungring habe den Radius R. Wie schwer ist er zu nehmen, damit bei N Pferdestärken und m minutlichen Touren die Schwankungen der Maschine, vom Mittelwerte aus gerechnet, den Betrag $\frac{1}{n}$ nicht überschreiten?

Auflösung. Ist P das Gewicht des Rades, so ist $\frac{P}{g}$ seine Masse, $\frac{P}{g} \cdot R^2 = \frac{P}{9{,}81} R^2$ sein Trägheitsmoment, wobei in Metern und Kilogrammen zu rechnen ist. In Formel 15) eingesetzt, giebt dies

$$\frac{P}{g} R^2 = \frac{21\,600 N n}{m^3},$$

also ist das gesuchte Gewicht des Ringes

$$P = \frac{9{,}81 \cdot 21\,600 \cdot Nn}{R^2 m^3}.$$

Leistet z. B. die Maschine 100 Pferdestärken bei 60 Touren, und soll die Schwankung, vom Mittelwerte aus gerechnet, $\frac{1}{100}$ nicht übersteigen, so ergiebt sich als Gewicht des Ringes, wenn der Radius $R = 2\,\text{m}$ sein soll,

$$R = \frac{9{,}81 \cdot 21\,600 \cdot 100 \cdot 100}{4 \cdot 60^2} = \frac{9{,}81 \cdot 216\,000\,000}{4 \cdot 216\,000} = 2452\ \text{kg}.$$

Die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Maschine ist dabei 2π, die Maximalgeschwindigkeit $2\pi\left(1 + \frac{1}{100}\right)$, die Minimalgeschwindigkeit $2\pi\left(1 - \frac{1}{100}\right)$, wobei bezüglich des Ausdrucks mittlere Geschwindigkeit von der oben erörterten Erlaubnis zur angenäherten Berechnung Gebrauch gemacht worden ist.

Bei dieser Aufgabe war der Radius des Ringes schlechthin gleich R angenommen. In Wahrheit handelt es sich um einen äufseren Radius R und einen inneren Radius R_1. (Das vorige R ist nicht etwa das arithmetische Mittel der beiden jetzigen Radien, sondern sein Quadrat ist das Mittel der jetzigen Radienquadrate.) Also:

433) **Aufgabe.** Dieselbe Aufgabe für einen Schwungring mit rechteckigem Querschnitte und den Radien R und R_1 zu lösen.

Auflösung. Das Trägheitsmoment ist jetzt:

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{R^2 + R_1^2}{2}.$$

Einsetzung in Gleichung 15) giebt als Gewicht des Ringes

$$P = \frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 21\,600 Nn}{m^2\left(R^2 + R_1^2\right)}.$$

Sind z. B. für das vorige Zahlenbeispiel die beiden Radien $R = 2{,}3$ m und $R_1 = 2$ m, so ergiebt sich unter denselben Bedingungen das Gewicht 2112 kg.

434) **Aufgabe.** Ein Schwungring habe den Radius R und das Gewicht P. Welche Schwankung macht die Maschine bei N Pferdestärken und m minutlichen Umdrehungen?

Auflösung.

$$\frac{1}{n} = \frac{9{,}81 \cdot 21\,600 \cdot N}{PR^2 m^3}.$$

Ist z. B. $P = 5000$ kg, $R = 2$ m, Tourenzahl m $= 60$ und Zahl der Pferdestärken $N = 100$, so folgt

$$\frac{1}{n} = \frac{9{,}81 \cdot 21\,600 \cdot 100}{5000 \cdot 4 \cdot 60^2} = \sim \frac{1}{204}.$$

Berücksichtigt man dagegen beide Radien, so lautet die Lösung

$$\frac{1}{n} = \frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 21\,600 N}{P\left(R^2 + R_1^2\right) m^3}.$$

Dasselbe Beispiel, jedoch mit $R = 2{,}3$ und $R_1 = 2$ giebt als Schwankung $\frac{1}{237}$.

Genauer pflegt die Praxis nicht zu rechnen. Will man die Aufgaben durch Einrechnung der Radarme u. s. w. komplizierter machen, so stellen sich bei einfacherer Gestaltung dieser Teile Schwierigkeiten nicht in den Weg.

Endlich sei noch folgende Aufgabe gestellt:

435) **Aufgabe.** Eine Maschine leiste N Pferdestärken bei m minutlichen Umdrehungen. Wieviel Arbeit hat das Schwungrad in der günstigen Periode aufzunehmen und in der ungünstigen wieder abzugeben?

Auflösung. Nach Gleichung 8) war die aufzunehmende und abzugebende Arbeit

$$A_{\max} - A_{\min} = 0{,}6614\, pr.$$

Nach Gleichung 13) war aber

$$qr = \frac{75 \cdot 60 N}{2\pi m}.$$

Folglich ist die Arbeitsaufnahme und Abgabe der Schwungmasse

$$A = 0{,}6614 \frac{75 \cdot 60 N}{2\pi m} = \sim 473{,}7 \frac{N}{m}.$$

Werden z. B. 100 Pferdestärken bei 50 Touren geleistet, so ist die Aufnahme und Abgabe von Arbeit

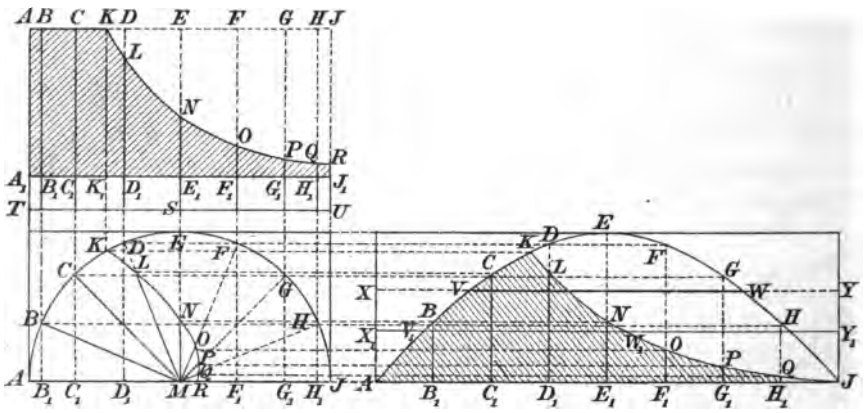
$$A = 473{,}7 \cdot \frac{100}{50} = 947{,}4 \text{ mkg},$$

wobei die Gröfse des Schwungrades, die der Schwankung u. s. w. ganz gleichgültig ist.

436) Ein leichtverständliches Diagramm für die Geschwindigkeitsverhältnisse des Schwungrades erhält man, indem man durch einen Punkt ein Strahlenbüschel legt und auf jedem Strahle die der entsprechenden Kurbelstellung zugehörige Geschwindigkeit aufträgt. Die Endpunkte geben die verlangte Diagrammkurve.

Durch ein anderes Diagramm (Fig. 287) läfst sich veranschaulichen, wie sich die Verhältnisse der Schwungradarbeit gestalten, wenn nicht von der Volldruckmaschine, sondern von der Expansionsmaschine die Rede ist, möge nun das Mariottesche Diagramm, oder das adiabitische für Druckluft oder Dämpfe, oder endlich ein beliebiges Indikatordiagramm zu Grunde gelegt werden.

Fig. 287.



In Figur 287 ist der Fall des Mariotteschen Diagramms und der der Volldruckmaschine zugleich behandelt.

Als Expansionsdiagramm ist dasjenige für $\frac{1}{4}$ Füllung gewählt, so dafs $SN = \frac{1}{2}\,TA$, $UR = \frac{1}{4}\,TA$ ist und das Diagramm von einer gleichseitigen Hyperbel begrenzt wird. TU ist die Grundlinie, A_1J_1 die atmosphärische Linie des Diagramms. Die schraffierte Fläche giebt also den Überdruck an. Die Überdruckshöhe A_1A ist halb so grofs, wie die Grundlinie des Diagramms gezeichnet worden, was bei der Willkürlichkeit des Mafsstabes der Allgemeinheit keinen Eintrag thut. Ebenso grofs ist der Radius des Kurbelkreises, von dem nur die Hälfte gezeichnet zu werden braucht.

Der Halbkreis ist durch die Punkte B, C, D, E, F, G, H in acht gleiche Teile geteilt. Rechts davon ist über der Geraden $AJ = r\pi$, die in derselben Weise eingeteilt ist, durch Horizontalprojektion der Kreispunkte auf die entsprechenden Lote die zugehörige Sinuslinie konstruiert. Diese bedeutet das auf die Peripherie übertragene Arbeitsdiagramm bei der Volldruckarbeit.

Angenommen XY sei die Horizontale, für die $AJYX$ gleich der Fläche der Sinuskurve ist, d. h. also $AX = \frac{2}{\pi}r$, so würde die Fläche VEW gleich der Summe der Flächen AXV und JYW sein. Das

Schwungrad würde also in der Überschufsperiode die durch VEW dargestellte Arbeit aufnehmen und in der Verlustperiode ebensoviel abgeben.

Handelt es sich dagegen um das Expansionsdiagramm, so ist folgendermafsen zu verfahren. Auf dem Radius MD des Kurbelkreises ist die Überdruckslinie D_1L als ML abzutragen und der nun gefundene Endpunkt L ist auf das Lot D_1D der Sinuslinie zu projizieren, was dort den Punkt L giebt. Ebenso ist mit den übrigen Radien des Kurbelkreises zu verfahren. Die neue Diagrammkurve für die Kurbelperipherie ist also von A bis K die vorige Sinuskurve, von dort ab aber tritt der Expansion entsprechend die Kurve $KLNOPQJ$ für diese ein. Die schraffierte Fläche des neuen Diagramms ist, da bei der Anwendung des Hebelgesetzes die Momente und die Arbeiten sich nicht ändern, gleich der des Expansionsdiagramms.

Berechnet man die letztere theoretisch oder mit Hülfe des Polarplanimeters, so findet man durch Multiplikation der Fläche mit $\frac{1}{r\pi}$ die Höhe AX_1, die das Rechteck AJY_1X_1 der Diagrammfläche gleich macht. Jetzt giebt die Fläche $V_1W_1K = AX_1V_1 + JY_1W_1$ die Arbeit an, welche das Schwungrad in der Überschufs- und Verlustperiode aufzunehmen bezw. abzugeben hat.

Während bei der Volldruckarbeit die Verlängerung von XY den Kurbelkreis in den Punkten schneidet, wo das Moment der Kraft gleich dem der Last ist und zugleich das Minimum und Maximum der Winkelgeschwindigkeit stattfinden, hat man jetzt X_1Y_1 bis zu den Schnitten mit dem Kreise zu verlängern, um den Minimal- und Maximalpunkt (aber nicht den der Momentengleichheit zwischen Kraft und Last) zu finden.

Ist A die Überschufsarbeit, so hat man für diese Geschwindigkeiten die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}T\vartheta^2_{\max} - \tfrac{1}{2}T\vartheta^2_{\min} = A$$

Fügt man noch die Geschwindigkeit der mittleren Arbeitswucht des Rades als ϑ ein (d. h. das Mittel der Grenzwerte), so geschieht dies durch die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}T\vartheta^2_{\max} + \tfrac{1}{2}T\vartheta_{\min} = 2\,T\frac{\vartheta^2}{2}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

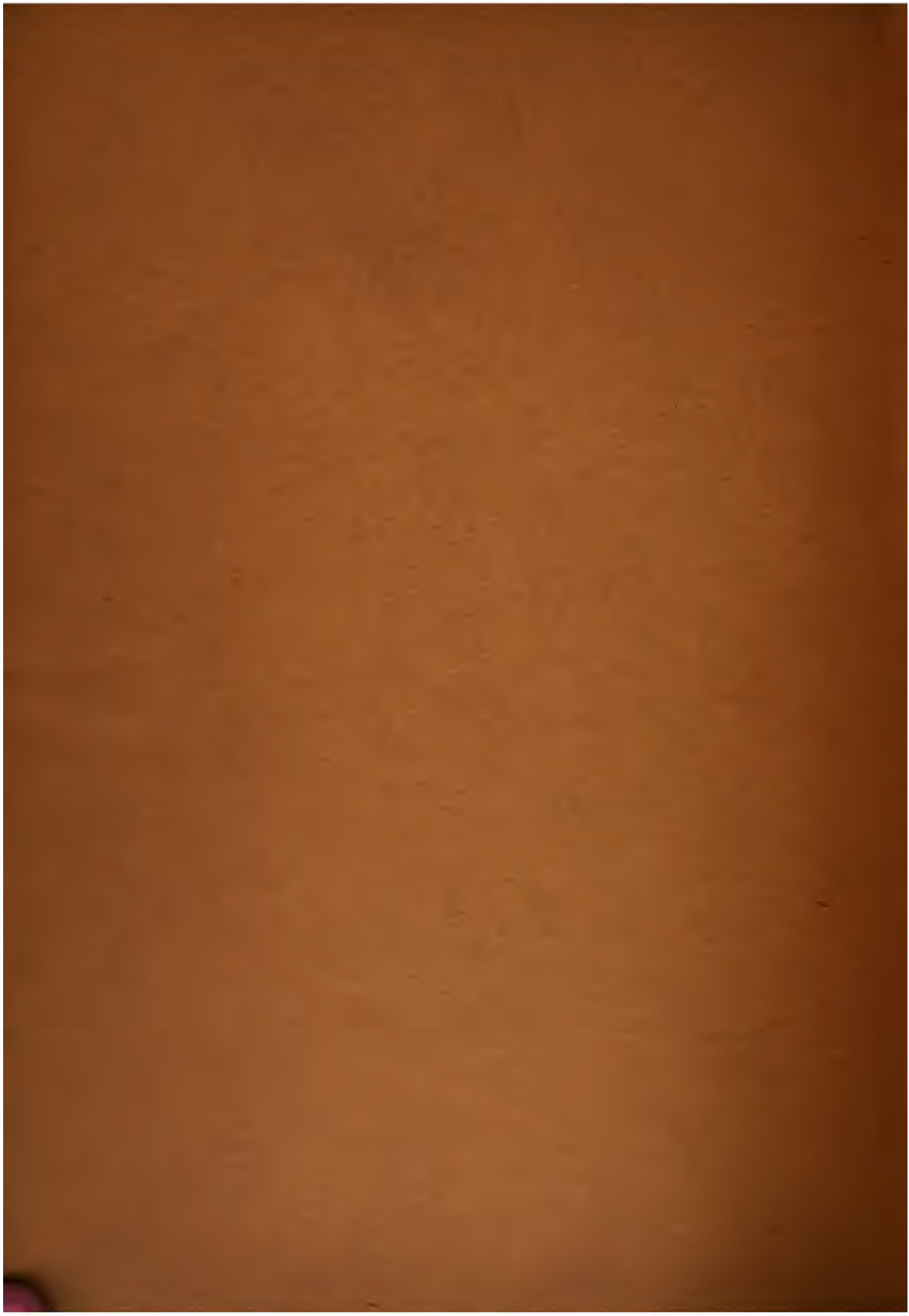
$$\tfrac{1}{2}T\vartheta^2_{\max} = \tfrac{1}{2}\Big[2\,T\frac{\vartheta^2}{2} + A\Big],$$

$$\tfrac{1}{2}T\vartheta^2_{\min} = \tfrac{1}{2}\Big[2\,T\frac{\vartheta^2}{2} - A\Big].$$

Will man die Wirkung der Voreinströmung des Gegendampfes berücksichtigen, so hat man dessen Überdrucklinien am Ende des Expansionsdiagramms von dessen Drucklinien abzuziehen, was stellenweise auch Negatives geben kann.

In entsprechender Weise ist mit dem adiabatischen Diagramm für Druckluft, Heifsluft oder Dämpfe zu verfahren.

Will man für die Kurbelbewegung nicht die Sinusversus-Bewegung als mafsgebend annehmen, sondern die verschiedenen Lagen der Pleuelstange berücksichtigen, so hat man von der durch die Kolbenstange übertragenen Druckkraft die in der Richtung der Pleuelstange liegende Komponente zu bilden und von dieser die Tangentialkomponente zu bilden, die dann im Diagramm der Sinuslinie als Lot abzutragen ist.

So gewinnt man genaue graphische Darstellungen für die Arbeitsvorgänge am Schwungrade, während der exakten rechnerischen Durchführung unüberwindliche Integrationsschwierigkeiten im Wege stehen, die nur durch Näherungsrechnungen umgangen werden können.

Die Behandlung der Fälle der Zweicylinder- und Dreicylindermaschinen soll dem Leser überlassen bleiben. Der rechnerische und der graphische Weg schliefsen sich dem für einfache Maschinen gegebenen genau an.